ELEMENTI

DI

ASTRONOMIA

CON LE APPLICAZIONI

ALLA GEOGRAFIA, NAUTICA, GNOMONICA E CRONOLOGIA

DI

GIOVANNI SANTINI

PROFESSORE DI ASTRONOMIA NELL' I. R. UNIVERSITA' DI PADOVA
UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA
SOCIO DELL' ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI DI PADOVA
DELLA SOCIETA' ASTRONOMICA DI LONDRA ec. ec.

EDIZIONE SECONDA
RIVEDUTA ED AUMENTATA DALL' AUTORE

VOL. I.

PADOVA
DALLA TIPOGRAFIA DEL SEMINARIO
MDCCCXXX.

ALLA

STUDIOSA GIOVENTÙ

L' AUTORE

Dopo che mi venne per Sovrana Clemenza affidato l' incarico di esporre in questa celebre Università le Lezioni di Astronomia teorico-pratica con le sue applicazioni agli usi della vita civile, lungamente meditai quale fosse il trattato più conveniente pella istruzione della gioventù, e più consentaneo alle dottrine esposte nelle altre cattedre affini delle matematiche discipline. Le istituzioni astronomiche del celebre Eustachio Manfredi pubblicate in Bologna nel 1749, opera non mai abbastanza commendata per la chiarezza con cui è scritta, il Compendio di Astronomia del signor La-Lande volgarizzato dal chiarissimo mio predecessore signor ab. Vincenzo Chiminello, mi sembrarono troppo remote dallo stato attuale di questa scienza, per i progressi dell' analisi e della meccanica pratica salita ai nostri giorni ad un eminente grado di perfezione. Io mi applicai pertanto ad un corso di lezioni, che nè troppo elementare, nè troppo sublime potesse porre i giovani in istato di leggere utilmente le opere e le memorie astronomiche in tanta copia diffuse nelle Effemeridi, negli Atti delle più celebri Accademie, e nei Giornali scientifici delle

più colte nazioni; ed assuefacendoli gradatamente a superare qualche difficoltà, non fossero poi scoraggiati e respinti dal primo ostacolo che in quelle incontrerebbero; ben conoscendo gl' immensi vantaggi con siffatte opere elementari in Matematica pura ed in Meccanica apportati alla studiosa gioventù italiana dai celebri geometri Paoli, Brunacci e Venturoli. La prima edizione di questi miei Elementi di Astronomia fu pubblicata negli anni 1819-1820, mentre era appena sortita in Palermo un' altra opera interessantissima sullo stesso argomento del celebre nostro connazionale P. Piazzi (*Lezioni di Astronomia*. Palermo 1817) recentemente mancato all' onore e lustro dell' Astronomia. L' indulgenza con la quale fu quel mio tenue lavoro accolto dalla cortesia del pubblico mi fu di sprone a superare le gravi difficoltà che si opponevano a questa seconda edizione, nella quale mantenendo lo stesso ordine, mi sono creduto in dovere di fare molti utili cambiamenti. Primieramente giova sperare che una più attenta revisione abbia fatto sparire molte mende giustamente rimproverate a quella prima edizione; in secondo luogo ho creduto opportuno diffondermi molto di più sulla descrizione e sull' uso delle principali macchine astronomiche, delle quali in una tavola apposita ho riferito i disegni eseguiti dietro quelle che adornano l' Osservatorio di questa nostra Università. Si troverà notabilmente aumentata la teorica delle Comete, delle quali viene esposto un ampio catalogo estendentesi fino al principio dell' anno corrente; e per ultimo in fine del secondo volume ho inscrito un apposito supplimento sul calcolo delle perturbazioni planetarie, scarso in vero, se alla vastità di tale spinoso argomento si vuole confrontare; ma sufficiente perchè la studiosa gioventù abbia una approssimata idea della sua difficoltà, ed una guida nel calcolo delle pertur-

bazioni per la via delle quadrature, quali frequentemente occorrono al presente nella teorica delle Comete e dei nuovi pianeti, le orbite dei quali sono molto eccentriche, e molto inclinate al piano dell' ecclittica. Pel rimanente mi è sembrato opportuno attenermi al piano precedentemente seguito, di risalire cioè dalle osservazioni astronomiche fra loro combinate e discusse alla cognizione delle leggi, alle quali con tanta regolarità ubbidiscono i corpi celesti, e giungere fino a dimostrare la esistenza di una reciproca azione che fra loro esercitano i pianeti sì primarii che secondarii del sistema solare. Per giungere a questo scopo non ho tenuto quell' ordine che hanno seguito gli Astronomi dei diversi tempi, nè tampoco ho riferito i passi ora diretti, ora retrogradi dello spirito umano in questa bella parte delle matematiche applicate, ma bensì quello che mi sembrò più facile e naturale, ponendo fine all' Astronomia pura colla teorica delle forze centrali.

Per non interrompere l' ordine delle materie ho riferito in fine la dottrina delle rifrazioni astronomiche, dei piccoli movimenti cui sembrano sottoposte le stelle fisse in virtù del moto progressivo della luce, e della nutazione dell'asse terrestre, come pure ciò che ha rapporto alla nautica, cronologia, gnomonica, e figura della terra, tutto che tratto tratto abbisogni averne contezza per la riduzione delle osservazioni astronomiche. Per ultimo trattando della grandezza e figura della terra ho stimato non del tutto inutile una breve esposizione delle principali projezioni della sfera e dei metodi praticati dai più accreditati Geografi ed Astronomi nel delineare carte sì geografiche che celesti; tanto più che interessantissime si rendono tali dottrine pegli ingegneri architetti, ai quali sono destinate le mie pubbliche lezioni.

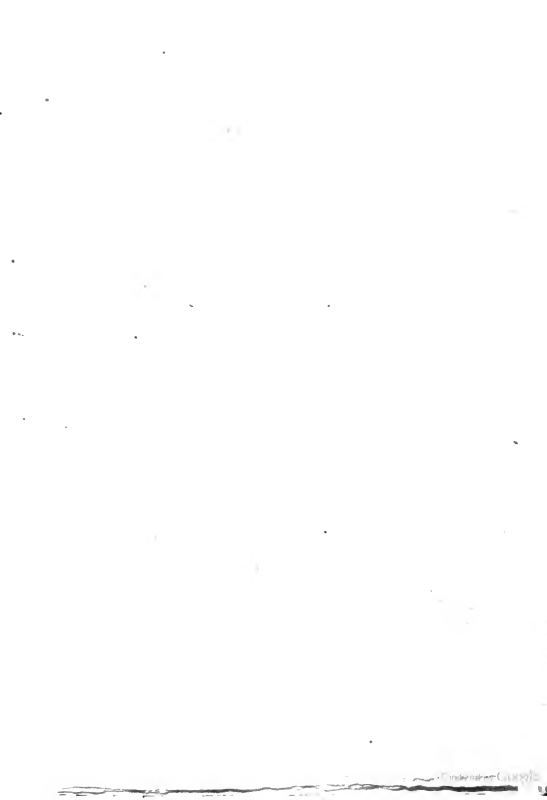
La vastità degli argomenti mi obbligò sovente a lasciare da parte i varii metodi ed i diversi punti di vista con cui furono da altri autori presentate molte delle dottrine astronomiche, e ad essere parco negli esempii numerici, i quali sono sempre d'altronde necessarii per la chiara e retta intelligenza. Quelli che vogliono progredire in questa sublime scienza potranno ricorrere a trattati più estesi, e soprattutto alle eccellenti opere di La-Lande e di De-Lambre, ed ai molti trattati speciali sopra le varie dottrine astronomiche, dove ritroveranno quella latitudine che non poteva, senza troppo eccedere i giusti limiti accordati ad un'opera elementare, essere qui adottata.

Chi scrive un'opera elementare non crea la scienza di cui prende a trattare; solo ha in vista di riunire e disporre le altrui scoperte. Io procurai di accennare con opportune citazioni gli autori dei principali metodi e delle principali dottrine che per me si esposero; ma è ben evidente che non iscrivendo io la storia ed i progressi dell'Astronomia, ho dovuto evitare di riferire bene spesso a chi di tale o tale altra teoria andiamo debitori. Riconosca pertanto ciascuno di buon grado le proprie scoperte, e non attribuisca a mal talento se per avventura non si trova citato, non amando io per certo vestirmi delle spoglie altrui, contento solo se qualche piccolo vantaggio sia per derivare da questo mio lavoro alla studiosa gioventù, a cui particolarmente lo dedico e consacro.

Spiegazione di alcuni simboli ed abbreviazioni, delle quali fanno uso gli Astronomi.

Segni del Zodiaco		Pianeti	
♈	Ariete	☿	Mercurio
♉	Toro	♀	Venere
♊	Gemelli	♁	Terra
♋	Cancro	♂	Marte
♌	Leone	⚳	Cerere
♍	Vergine	⚴	Pallade
♎	Libra	⚵	Giunone
♏	Scorpione	⚶	Vesta
♐	Sagittario	♃	Giove
♑	Capricorno	♄	Saturno
♒	Acquario	♅	Urano
♓	Pesci		

☉ Sole ☽ Luna

AR	indica ascensione retta	M	mattina
g	giorni	S	sera
h	ore	A	australe
c	circoli	B	boreale
s	segni	diff.	differenza
°	gradi	dist. mass.	distanza massima
′	minuti	dist. min.	distanza minima
″	secondi	imm.	immersione
☌	congiunzione	em.	emersione
☍	opposizione		ec.

TRIGONOMETRIA

PIANA E SFERICA

I. Si sa dalla trigonometria elementare, e dall'introduzione al calcolo, che essendo a, b due archi qualunque, si hanno le seguenti relazioni

1. $\text{sen}(a+b)=\text{sen}\,a\cos b+\text{sen}\,b\cos a$
2. $\text{sen}(a-b)=\text{sen}\,a\cos b-\text{sen}\,b\cos a$
3. $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$
4. $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$,

dalle quali si deducono le seguenti con somma facilità

5. $\text{sen}\,a\cos b=\frac{1}{2}\text{sen}(a+b)+\frac{1}{2}\text{sen}(a-b)$
6. $\cos a\,\text{sen}\,b=\frac{1}{2}\text{sen}(a+b)-\frac{1}{2}\text{sen}(a-b)$
7. $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\cos(a-b)+\frac{1}{2}\cos(a+b)$
8. $\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b=\frac{1}{2}\cos(a-b)-\frac{1}{2}\cos(a+b)$
9. $1-\cos a=2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}a$; $\text{sen}\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos a)}$
10. $1+\cos a=2\cos^2\frac{1}{2}a$; $\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos a)}$
11. $\text{sen}\,2a=2\,\text{sen}\,a\cos a$

Se facciamo $a+b=p$, $a-b=q$, in modo che $a=\frac{1}{2}(p+q)$, $b=\frac{1}{2}(p-q)$, introdotti questi valori nelle precedenti formule avremo le seguenti riduzioni, che sono utilissime in molti casi:

(5)′ . . . $\text{sen}\,p+\text{sen}\,q=2\,\text{sen}\frac{1}{2}(p+q).\cos\frac{1}{2}(p-q)$

(6)′ . . . $\text{sen}\,p-\text{sen}\,q=2\cos\frac{1}{2}(p+q).\text{sen}\frac{1}{2}(p-q)$

(7)′ . . . $\cos q+\cos p=2\cos\frac{1}{2}(p+q).\cos\frac{1}{2}(p-q)$

(8)′ . . . $\cos q-\cos p=2\,\text{sen}\frac{1}{2}(p+q).\text{sen}\frac{1}{2}(p-q)$.

Da queste formule, mediante la divisione, risultano le seguenti

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(p+q)=\frac{\text{sen}\,p+\text{sen}\,q}{\cos p+\cos q};\quad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(p-q)=\frac{\text{sen}\,p-\text{sen}\,q}{\cos p+\cos q}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(p+q):\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(p-q)::\text{sen}\,p+\text{sen}\,q:\text{sen}\,p-\text{sen}\,q;\ \text{cc.}$$

II. Oltre le sopra riferite formule, sarà bene richiamare alla memoria eziandio le seguenti, l'uso delle quali è frequentissimo in tutta l'analisi

$$\text{sen}\,x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3...7}+\text{ec.}=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3...6}+\text{ec.}=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$(\cos x \pm \sqrt{-1}.\operatorname{sen} x)^m = \cos m x \pm \sqrt{-1}.\operatorname{sen} m x$.

Da quest' ultima sviluppando la potenza m del primo membro, e confrontando le quantità reali fra loro, e le immaginarie pure fra loro, si ricavano i valori di $\cos m x$, e $\operatorname{sen} m x$ espressi per le potenze dei seni e coseni dell' arco semplice x.

Occorre spesse volte di convertire le potenze dei seni e coseni in seni e coseni di archi multipli, ed a ciò servono le seguenti formule, che si dimostrano nell' introduzione, e facilmente si ricavano dalle espressioni immaginarie dei seni e coseni date di sopra:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$
$$2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$$
$$4 \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x$$
$$8 \operatorname{sen}^4 x = 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x$$
$$16 \operatorname{sen}^5 x = 10 \operatorname{sen} x - 5 \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x$$
$$32 \operatorname{sen}^6 x = 10 - 15 \cos 2x + 6 \cos 4x - \cos 6x$$
$$64 \operatorname{sen}^7 x = 35 \operatorname{sen} x - 21 \operatorname{sen} 3x + 7 \operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 7x$$

ec.

$$\cos x = \cos x$$
$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$
$$4 \cos^3 x = 3 \cos x + \cos 3x$$
$$8 \cos^4 x = 3 + 4 \cos 2x + \cos 4x$$
$$16 \cos^5 x = 10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x$$
$$32 \cos^6 x = 10 + 15 \cos 2x + 6 \cos 4x + \cos 6x$$
$$64 \cos^7 x = 35 \cos x + 21 \cos 3x + 7 \cos 5x + \cos 7x$$

ec.

III. Se abbiasi un arco $p + q$ tale, che sia q un arco non molto grande, si potranno sempre ottenere i valori di $\operatorname{sen}(p + q)$, e $\cos(p + q)$ mediante le due seguenti serie, le quali altro non sono che una immediata conseguenza del teorema di Taylor

$$(a)\ \operatorname{sen}(p+q) = \operatorname{sen} p + q \cos p - \frac{q^2}{1.2} \operatorname{sen} p - \frac{q^3}{1.2.3} \cos p + \frac{q^4}{1.2.3.4} \operatorname{sen} p + \text{ec.}$$

$$(b)\ \cos(p+q) = \cos p - q \operatorname{sen} p - \frac{q^2}{1.2} \cos p + \frac{q^3}{1.2.3} \operatorname{sen} p + \frac{q^4}{1.2.3.4} \cos p - \text{ec.}$$

Le quali ponendo

$$\frac{\operatorname{sen}(p + q) - \operatorname{sen} p}{\cos p} = u\,; \quad \frac{\cos(p + q) - \cos p}{\operatorname{sen} p} = u'$$

si cangiano nelle seguenti

$$u = q - \frac{q^2}{1.2} \operatorname{tang} p - \frac{q^3}{1.2.3} + \frac{q^4}{1.2.3.4} \operatorname{tang} p + \text{ec.}$$

$$u' = -q - \frac{q^2}{1.2}\cot p + \frac{q^3}{1.2.3} + \frac{q^4}{1.2.3.4}\cot p - \text{ec.}$$

Queste due ultime serie col metodo del regresso danno le seguenti

$$q = u + \frac{\tang p}{2} u^2 + \frac{1+3\tang^2 p}{2.\,3} u^3 + \frac{9\tang p + 15\tang^3 p}{2.\,3.\,4} u^4$$
$$+ \frac{9 + 90\tang^2 p + 105\tang^4 p}{2.\,3.\,4.\,5} u^5 + \text{ec.}$$

$$-q = u' + \frac{\cot p}{2} u'^2 + \frac{1+3\cot^2 p}{2.\,3} u'^3 + \frac{9\cot p + 15\cot^3 p}{2.\,3.\,4} u'^4$$
$$+ \frac{9 + 90\cot^2 p + 105\cot^4 p}{2.\,3.\,4.\,5} u'^5 + \text{ec.}$$

Se pertanto saranno A, B due archi, la differenza dei quali non sia molto grande, ponendo $u = \dfrac{\text{sen}\,A - \text{sen}\,B}{\cos B}$ avremo

$$A - B = u + \frac{\tang B}{2} u^2 + \frac{1+3\tang^2 B}{2.\,3} u^3 + \frac{9\tang B + 15\tang^3 B}{2.\,3.\,4} u^4 + \text{ec.}\ (1)$$

parimente posto $v = \dfrac{\text{sen}\,A - \text{sen}\,B}{\cos A}$ avremo

$$A - B = v - \frac{\tang A}{2} v^2 + \frac{1+3\tang^2 A}{2.\,3} v^3 - \frac{9\tang A + 15\tang^3 A}{2.\,3.\,4} v^4 + \text{ec.}\ (2)$$

In un modo simile la seconda serie ordinata per u' darà

$$\left(\text{ponendo } \frac{\cos A - \cos B}{\text{sen}\,B} = u'\,;\ \frac{\cos A - \cos B}{\text{sen}\,A} = v'\right)$$

$$B - A = u' + \frac{\cot B}{1.2} u'^2 + \frac{1+3\cot^2 B}{2.\,3} u'^3 + \frac{9\cot B + 15\cot^3 B}{2.\,3.\,4} u'^4 + \text{ec.}\ (3)$$

$$B - A = v' - \frac{\cot A}{1.2} v'^2 + \frac{1+3\cot^2 A}{2.\,3} v'^3 - \frac{9\cot A + 15\cot^3 A}{2.\,3.\,4} v'^4 + \text{ec.}\ (4)$$

le quali serie riescono in alcuni casi molto utili, e sono dovute al signor profess. Molweide.

IV. Se si ha l'equazione $\tang x = m \tang y$ si potrà sempre esprimere l'arco $x - y$ per una serie ordinata per li seni degli archi multipli di y. In fatti introducendo nella precedente equazione le espressioni immaginarie dei seni e dei coseni, essa diviene

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{me^{y\sqrt{-1}} - me^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}},$$ che equivale alla seguente $\dfrac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} = \dfrac{me^{2y\sqrt{-1}} - m}{e^{2y\sqrt{-1}} + 1}$; onde, ponendo $\dfrac{1-m}{1+m} = \theta$,

si ha $e^{2x\sqrt{-1}} = \dfrac{1+\dfrac{1-m}{1+m}e^{-2y\sqrt{-1}}}{e^{-2y\sqrt{-1}}+\dfrac{1-m}{1+m}} = e^{2y\sqrt{-1}}\,\dfrac{1+\theta e^{-2y\sqrt{-1}}}{1+\theta e^{2y\sqrt{-1}}}$;

prendendo i logaritmi, e sviluppando in serie il logaritmo del secondo membro, si avrà, dopo le opportune riduzioni,

$$x - y = -\theta \operatorname{sen} 2y + \frac{\theta^2}{2}\operatorname{sen} 4y - \frac{\theta^3}{3}\operatorname{sen} 6y + \frac{\theta^4}{4}\operatorname{sen} 8y - \text{ec.} \quad (5)$$

la quale elegante serie è dovuta al sommo geometra La Grange, e ci sarà spesso necessaria.

Premesse queste formule, delle quali faremo in seguito uso frequente, passiamo ad esporre le regole necessarie alla risoluzione dei triangoli, e principiamo dai piani.

Risoluzione dei triangoli piani rettangoli.

V. (*Fig.* 1) Sia ACB un triangolo rettangolo in A; col centro B e raggio $Be = Bf = 1$ si descriva un arco di circolo ef, il quale misurerà l'angolo B. Condotte le perpendicolari eh, fg avremo

$he = \operatorname{tang} B = \cot C$; $fg = \operatorname{sen} B = \cos C$; $Bg = \cos B = \operatorname{sen} C$.

Ponendo poi $CB = a$, $AC = b$, $BA = c$, i triangoli simili ACB, Beh, Bfg daranno le seguenti eguaglianze

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a};\ \cos B = \frac{c}{a};\ \operatorname{tang} B = \frac{b}{c};\ \operatorname{sen} C = \frac{c}{a};\ \cos C = \frac{b}{a};\ \cot B = \frac{c}{b},$$

le quali unite all'equazione $\sqrt{b^2 + c^2} = a$ danno sempre la soluzione del seguente problema: *Dati due elementi del triangolo rettangolo, trovar gli altri.*

Convien non ostante eccettuare il caso, in cui siano dati i due angoli, poichè allora risultano i lati indeterminati.

Risoluzione dei triangoli obbliquangoli.

VI. (*Fig.* 2) Sia ora ACB un qualunque triangolo obbliquangolo, e s'indichino con lettere minuscole a, b, c i lati opposti agli angoli indicati con le lettere majuscole A, B, C. Condotta dall'angolo A la perpendicolare AD sopra il lato a, avremo dalla geometria la seguente equazione $c^2 = a^2 + b^2 - 2a.CD$; ora nel triangolo rettangolo ACD si ha $CD = b\cos C$. Sostituendo questo valore di CD, otterremo il valore di $\cos C$ così espresso

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$ Troveremo parimente

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

le quali tre equazioni contenendo i sei elementi del triangolo, cioè i tre lati, ed i tre angoli serviranno a risolvere il seguente problema generale: *Dei sei elementi del triangolo, datine tre, trovare gli altri.* Conviene anche qui eccettuare il caso, in cui sieno dati i tre angoli, poichè allora i lati risultano indeterminati, come si sa dalla geometria.

VII. Dalle tre superiori equazioni se ne possono dedurre alcune altre, le quali porgeranno direttamente la risoluzione di tutti i casi particolari che si presentano nella trigonometria. Eccomi ad esporle brevemente.

Osservando che $\text{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A$, sostituendo il valore di $\cos A$, e riducendo avremo

$$\text{sen}\, A = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2bc}$$

Quindi dedurremo, dividendo per a

$$\frac{\text{sen}\, A}{a} = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2abc}.$$

Ora il secondo membro di questa equazione è invariabile cambiando a in b, ovvero in c, con che nel primo convien cambiare A in B, ovvero in C. Avremo dunque

$$\frac{\text{sen}\, A}{a} = \frac{\text{sen}\, B}{b} = \frac{\text{sen}\, C}{c} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

donde risulta, che in un triangolo qualunque i seni degli angoli sono sempre proporzionali ai lati opposti.

L'equazione precedente posta sotto la forma $\frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, B} = \frac{a}{b}$ sommata e sottratta dall'unità ci dà le seguenti

$$\frac{\text{sen}\, B + \text{sen}\, A}{\text{sen}\, B} = \frac{b+a}{b}; \quad \frac{\text{sen}\, B - \text{sen}\, A}{\text{sen}\, B} = \frac{b-a}{b},$$

le quali divise una per l'altra danno $\frac{\text{sen}\, B - \text{sen}\, A}{\text{sen}\, B + \text{sen}\, A} = \frac{b-a}{b+a}$, e quindi (in virtù delle formule del § I)

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(B - A) = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(B + A) \cdot \frac{b-a}{b+a};$$

ora a motivo di $B + A = 180° - C$, sarà $\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(B + A) = \cot \tfrac{1}{2} C$, e perciò . . $\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(B - A) = \cot \tfrac{1}{2} C \, \frac{b-a}{b+a}$ . . . (2)

Per ultimo l'equazione $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ si può porre sotto una

forma comoda per l'uso logaritmico. Di fatti essendo

$1 - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A$; $1 + \cos A = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A$, avremo

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4 b c} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4 b c}.$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b + c)^2 - a^2}{4 b c} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4 b c}.$$

Se ora si pone $a+b+c=2p$, e si estrae la radice quadrata, avremo

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{b c}}; \quad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{b c}};$$

e quindi $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}}$,

le quali formule sono molto comode per il calcolo logaritmico.

Termineremo questo articolo coll'enumerazione dei casi, che si possono presentare nella risoluzione dei triangoli.

Caso I. Essendo dati due angoli A, B col lato a opposto all'angolo A, trovare C, b, c.

Sarà $C = 180 - A - B$; $b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$; $c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$.

Caso II. Essendo dati i due lati a, b con l'angolo A opposto ad uno di essi, trovare B, C, c.

Si avrà B per la formula $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \operatorname{sen} A$; se $b > a$, ed A acuto, vi saranno due soluzioni, giacchè lo stesso seno appartiene a due diversi archi, di cui uno è supplemento dell'altro. Se A è ottuso, sarà necessariamente B acuto; e se A acuto, e $b < a$ sarà ancora B acuto, e perciò anche in questo caso una sola soluzione. Trovato B si otterrà C sottraendo da $180°$ la somma di $B + A$. Per ultimo sarà $c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$.

Caso III. Essendo dati due lati b, a coll'angolo compreso C, si domandano gli altri angoli A, B, ed il terzo lato c.

Se si sottrae C da $180°$, resterà la somma di A, B; e la metà di questo residuo sarà $\tfrac{1}{2}(A + B)$; dalla formula (2)

$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - A) = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{b - a}{b + a}$, si avrà $\tfrac{1}{2}(B - A)$; conosciuti $\tfrac{1}{2}(B + A)$, $\tfrac{1}{2}(B - A)$ avremo $B = \tfrac{1}{2}(B + A) + \tfrac{1}{2}(B - A)$, ed $A = \tfrac{1}{2}(B + A) - \tfrac{1}{2}(B - A)$; per ultimo sarà $c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$.

Si potrà eziandio trovar c per la formula $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos C}$, la quale è incomoda a calcolarsi colle tavole dei logaritmi.

Accade sovente che i lati a, b siano dati per li loro logaritmi; allora si potrà calcolare il valore di $\frac{1}{2}(B-A)$ senza trovare in numeri i valori di a e di b. A tale oggetto osservo, che l'equazione (2) può scriversi ancora così, $\tang \frac{1}{2}(B-A) = \frac{\frac{b}{a}-1}{\frac{b}{a}+1} \cot \frac{1}{2} C$; ponendo poi $\frac{b}{a} = \tang \varphi$, avremo $\frac{\frac{b}{a}-1}{\frac{b}{a}+1} = \tang(\varphi - 45)$; e perciò $\tang \frac{1}{2}(B-A) = \tang(\varphi - 45) \cot \frac{1}{2} C$, donde facilmente calcoleremo il valore di φ, e quindi quello di $\frac{1}{2}(B-A)$.

Caso IV. Dati i tre lati, trovare i tre angoli.

Pongasi p uguale alla semisomma dei tre lati, ed avremo

$$\text{sen} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\text{sen} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}; \quad \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\text{sen} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ba}}; \quad \cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

le quali risolvono completamente il problema, e l'identità dell'angolo dedotto dai seni e dai coseni della sua metà serve di riprova all'operazione.

Affinchè possano i giovani esercitarsi nella soluzione dei triangoli rettilinei, e nel maneggio delle tavole dei logaritmi, porremo alcuni triangoli esattamente calcolati, sui quali, variando i dati, applicheranno le formule esposte nei quattro casi precedenti, e posti noti alcuni elementi, ricercando gli altri, dovranno ricadere in quelli che loro assegniamo.

Triangolo I.	Triangolo II.	Triangolo III.
$A = 67° \; 22' \; 52''$	$A = 95 \; 29' \; 42''$	$A = 132° \; 2' \; 15''$
$B = 50 \; 29 \; 47$	$B = 48 \; 57 \; 7$	$B = 29 \; 51 \; 14$
$C = 62 \; 7 \; 21$	$C = 35 \; 33 \; 11$	$C = 18 \; 6 \; 31$
$a = 7530,444$	$a = 4862,440$	$a = 4861,893$
$b = 6294,526$	$b = 3683,983$	$b = 3258,622$
$c = 7211,188$	$c = 2840,351$	$c = 2034,680$

Proprietà principali dei triangoli sferici.

VIII. Chiamasi *triangolo sferico* quello spazio racchiuso nella superficie di una sfera dall'incontro di tre circoli massimi della medesi-

ma sfera; i tre archi di circolo massimo compresi fra i tre punti d'incontro si chiamano *lati* del triangolo sferico, i di cui angoli sono le inclinazioni scambievoli dei lati ai tre punti d'incontro.

Si dimostra in geometria: 1.° che se due archi di circolo massimo s'incontrano in un punto A (*fig.* 3) si torneranno poscia ad incontrare in un punto D tale che gli archi ABD, AbD siano ciascuno $= 180°$; 2.° che l'angolo sferico A è uguale all'inclinazione dei piani dei circoli ABD, AbD, e perciò uguale all'angolo BCb compreso dalle perpendicolari BC, bC condotte pel centro della sfera alla comune sezione BD di essi piani; or l'angolo $BCb =$ arc. Bb (supponendo il raggio della sfera $= 1$): dunque l'angolo A è uguale all'arco di circolo massimo Bb compreso fra i suoi lati, descritto col polo A alla distanza di 90°.

Posto ciò, sia AEF un triangolo sferico qualunque formato dai tre archi di circolo massimo AE, EF, AF; sarà sempre la somma dei suoi tre lati minore di una circonferenza, ossia di 360°. In fatti, prolungati i lati AE, AF fino al loro incontro in D, sarà $EF < ED + DF$, e quindi $EF + AE + AF < AED + AFD$ ossia $< 360°$.

(*Fig.* 4) Sia ora un qualunque triangolo sferico ABC; coi punti A, B, C come poli si descrivano alla distanza di 90° gli archi di circolo massimo $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, saranno i punti B', C', A' poli degli archi AC, AB, BC; di fatti il punto B' appartenendo contemporaneamente agli archi $B'C'$, $B'A'$ sarà distante dai poli degli stessi archi A, C di 90°; dunque B' sarà polo di AC: lo stesso raziocinio si ripeterà per gli altri. Il triangolo $A'B'C'$ così formato si chiama triangolo polare di ABC. Ora prolungati i lati AB, AC, BC fino all'incontro con i lati del triangolo polare, sarà

$$A = FG = B'G + FC' - B'C' = 180° - B'C'$$

donde si deduce, che un angolo qualunque del triangolo ABC è $= 180° -$ il lato opposto del triangolo polare.

Quindi la somma dei tre angoli del triangolo ABC sarà uguale a tre mezze circonferenze meno i tre lati del triangolo polare; ma i tre lati del triangolo polare son sempre minori di una circonferenza, e maggiori di zero; dunque la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è sempre maggiore di due retti, e minore di sei retti.

Differiscono pertanto essenzialmente li triangoli sferici dai rettilinei in questo, che dati due angoli, non si può arguirne la misura del terzo, giacchè la loro somma può avere tutti i valori fra i due retti, ed i sei retti senza giammai arrivare all'uno o all'altro di questi limiti.

IX. Passiamo ora ad esporre i principj, sui quali si fonda la risoluzione dei triangoli sferici.

(*Fig.* 5) Sia ACB un triangolo sferico qualunque; O il centro della sfera, sulla cui superficie è esso disegnato. Immaginiamoci che

per il punto A sia condotto un piano tangente alla superficie della sfera, ed in esso sieno condotte le rette AB', AC' tangenti agli archi AB, AC, le quali saranno perpendicolari al raggio OA. Si conducano per il centro O, e per i punti B, C i raggi OB, OC, che si prolunghino fino all'incontro delle tangenti in B', C'; e si conduca la retta $B'C'$. S'indichino gli angoli del triangolo sferico per le lettere A, B, C, ed i lati opposti per le lettere minuscole a, b, c. Risulta da questa costruzione, che

$$AB' = \text{tang}\, AB = \text{tang}\, c = \frac{\text{sen}\, c}{\cos c}; \quad OB' = \sec c = \frac{1}{\cos c};$$

$$AC' = \text{tang}\, AC = \text{tang}\, b = \frac{\text{sen}\, b}{\cos b}; \quad OC' = \sec b = \frac{1}{\cos b}.$$

Il triangolo piano $AB'C'$ avendo l'angolo in $A = A$ darà

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{AB'}^2 - 2\,AC' \times AB' \cos A;$$

ed il triangolo piano $OC'B'$, a motivo di $C'OB' = BC = a$, darà

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{OC'}^2 - 2\,OB' \times OC' \cos a.$$

Sottraendo queste due equazioni una dall'altra, e facendo le opportune riduzioni, si otterrà $2 + 2\,\text{tang}\, c\, \text{tang}\, b \cos A = 2 \sec b \sec c \cos a$. Scrivendo i valori delle tangenti e delle secanti per i seni e coseni, e dividendo per 2 otterremo $\cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A = \cos a$, e

quindi . . . $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}$ . . . (1)

Un discorso analogo relativamente agli angoli B, C ci condurrà alle due seguenti equazioni

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, c} \ldots (2) \qquad \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b} \ldots (3)$$

le quali si possono direttamente ottenere dall'equazione (1) mutando l'angolo A in B, ovvero in C, purchè contemporaneamente si muti a in b, ovvero in c.

X. Le tre equazioni ora trovate, contenendo tutti i sei elementi del triangolo sferico, serviranno a risolvere il seguente problema: *In un triangolo sferico dati tre qualunque dei suoi elementi, determinare gli altri tre,* giacchè considerati questi come tre incognite, potremo sempre determinarli col mezzo delle tre riferite equazioni.

Prima però di passare alla enumerazione dei casi, che si possono presentare nella soluzione di questo problema generale, è necessario dedurre dalle superiori equazioni alcune altre, le quali ci saranno molto utili nella risoluzione dei triangoli.

Essendo $\text{sen}\, A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$, se sostituiremo nel secondo membro il valore di $\cos A$, e faremo le opportune riduzioni troveremo

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 b-\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c}}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Ora il secondo membro è una funzione invariabile dei tre lati a, b, c. Se dunque cambieremo A in B o C, con che a deve cambiarsi in b o in c, avremo . . $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$ . . . (4)
donde risulta, *che in un triangolo sferico i seni degli angoli stanno fra loro, come i seni dei lati opposti.*

Riprendiamo le equazioni (1), (2) del numero precedente, e ponghiamole sotto questo aspetto

$$\cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c=\cos a-\cos b\cos c\,;$$
$$\cos B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c=\cos b-\cos a\cos c\,,$$

ed eliminiamo b per avere una relazione fra A, B, a, c.

Principieremo dall'eliminare $\cos b$, ed otterremo dividendo per $\operatorname{sen} c$

$$\cos A \operatorname{sen} b+\cos B \operatorname{sen} a\cos c=\cos a \operatorname{sen} c\,.$$

Ponendo ora in quest'ultima equazione in vece di $\operatorname{sen} b$ il suo valore $\frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}$ dedotto dall'equazione (4), otterremo

$$\cot A \operatorname{sen} B+\cos B\cos c=\cot a \operatorname{sen} c \quad . \; . \; . \quad (5)$$

In fine per avere una relazione fra A, B, C, a, si scriva il secondo membro di quest'ultima equazione sotto la forma
$\cos a\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a}=\cos a\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$ in virtù della (4); e moltiplicando tutto per $\operatorname{sen} A$, avremo $\cos A \operatorname{sen} B+\cos B \operatorname{sen} A\cos c=\cos a \operatorname{sen} C$.
Mutando A in C, ed a in c in quest'ultima, si ottiene

$$\cos C \operatorname{sen} B+\cos B \operatorname{sen} C\cos a=\cos c \operatorname{sen} A\,.$$

Eliminando da queste due equazioni $\cos c$, e ricavando il valore di $\cos a$, si trova . . $\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$ . . . (6)
risultato che potevasi eziandio ottenere dalla equazione (1) colla considerazione dei triangoli polari.

XI. Alle formule (1), (2), (3), alla (6) e sue derivate si può dare una forma più comoda per il calcolo logaritmico. Difatti essendo $1-\cos A=2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A$; $1+\cos A=2\cos^2\frac{1}{2}A$, sostituendo i valori di $\cos A$, avremo

$$2\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\cos b\cos c+\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c-\cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

la quale per la formula (8)' del § I. si riduce a

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b+c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}\right]}.$$

Parimente sarà $2\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}$, ovvero

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left[\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(b+c+a)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}\right]}.$$

Con un raziocinio analogo l'equazione (6) darà

$$\text{sen}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left[-\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen}\, B\, \text{sen}\, C}\right]};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left[\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C)}{\text{sen}\, B\, \text{sen}\, C}\right]}.$$

Quantunque il valore di $\text{sen}\frac{1}{2}a$ comparisca di forma immaginaria, egli è facile convincersi, che sarà sempre reale, giacchè il denominatore $\text{sen}\, B\, \text{sen}\, C$ sarà sempre positivo, essendo gli angoli B, C sempre minori di 2 retti.

Siccome poi $A+B+C > 180°$, sarà $\frac{1}{2}(A+B+C) > 90$, e perciò $-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ quantità essenzialmente positiva.

Per quello poi che riguarda il fattore $\cos\frac{1}{2}(B+C-A)$, sarà esso sempre positivo, perchè chiamando a', b', c' i lati opposti agli angoli A, B, C nel triangolo polare; avremo

$$A = 180° - a'; \quad B = 180° - b'; \quad C = 180° - c'.$$

Quindi $\frac{1}{2}(B+C-A) = 90° - \frac{1}{2}(b'+c'-a')$, ed essendo $b'+c' > a'$ sarà necessariamente $\frac{1}{2}(B+C-A) < 90°$, e perciò il suo coseno positivo. Dunque la quantità sotto il segno radicale sarà positiva in ogni caso.

XII. Dai valori di $\text{sen}\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\text{sen}\frac{1}{2}B$, $\cos\frac{1}{2}B$, $\text{sen}\frac{1}{2}C$, $\cos\frac{1}{2}C$ si possono dedurre alcune relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo sferico molto eleganti, e dovute al dott. Gauss, le quali qui gioverà di esporre. Abbiamo di fatti

$$\text{sen}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(a-b+c)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(b+c+a)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}};$$

$$\text{sen}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(b+a-c)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(b-a+c)}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, c}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(a+c+b)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, c}};$$

$$\text{sen}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(c+a-b)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(c-a+b)}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}}.$$

Se ora riflettiamo, che $\text{sen}\frac{1}{2}(A-B) = \text{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B - \cos\frac{1}{2}A\,\text{sen}\frac{1}{2}B$,

sostituendo nel secondo membro i valori di sen $\frac{1}{2}A$, cos $\frac{1}{2}A$, sen $\frac{1}{2}B$, cos $\frac{1}{2}B$, avremo . . . sen $\frac{1}{2}(A-B)$

$$=\left[\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b+c)-\text{sen}\,\frac{1}{2}(b-a+c)}{\text{sen}\,c}\right]\sqrt{\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}}$$

La quantità, che nel secondo membro è compresa sotto il segno radicale è $=\cos\frac{1}{2}C$; la quantità poi compresa fra le parentesi facilmente si riduce a $\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}c}$; dunque $\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}c}$.

Con discorsi affatto simili dimostreremo pertanto la verità delle seguenti equazioni rimarchevoli per la loro simmetria:

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}C\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\quad .\ .\ .\quad (1)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c=\text{sen}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\quad .\ .\ .\quad (2)$$

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\quad .\ .\ .\quad (3)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c=\text{sen}\,\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\quad .\ .\ .\quad (4)$$

Se ora noi divideremo la prima per la seconda, e la terza per la quarta, oppure la prima per la terza, e la seconda per la quarta, avremo le quattro seguenti equazioni, le quali chiamansi formule di Nepero dal nome del loro inventore:

$$\left.\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\cot\tfrac{1}{2}C\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b)};\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\cot\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\right\}(A)$$

$$\left.\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a-b)=\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A+B)};\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+b)=\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\right\}(B)$$

Le formule (A) servono a calcolare gli angoli A, B quando si conoscano i lati a, b, e l'angolo compreso C, poichè in tal caso la prima equazione darà $\frac{1}{2}(A-B)$, la seconda poi $\frac{1}{2}(A+B)$; ed è evidente, che $A=\frac{1}{2}(A-B)+\frac{1}{2}(A+B)$; $B=\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B)$.

Le formule (B) servono a calcolare a, b quando si conoscano A, B, ed il lato compreso c, poichè conosciute col loro mezzo le quantità $\frac{1}{2}(a-b)$, $\frac{1}{2}(a+b)$, avremo $a=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$; $b=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$.

XIII. Riuniamo ora qui sotto un sol punto di vista le formule ritrovate negli articoli IX, X, e quelle che ne risultano, per poterne dedurre le regole da seguirsi nella risoluzione de' triangoli, tanto rettangoli, che obbliquangoli

$$(1)\ \cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c};\quad (2)\ \cos B=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c}$$

$$(3)\ \cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b};\quad (4)\ \frac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,a}=\frac{\text{sen}\,B}{\text{sen}\,b}=\frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,c}$$

(5) $\cot A\,\text{sen}\,B+\cos B\cos c=\cot a\,\text{sen}\,c$ fra A, B, a, c

(6) $\cot A\,\text{sen}\,C+\cos C\cos b=\cot a\,\text{sen}\,b$ $\quad A$, C, a, b

$(7)\ \cot B \operatorname{sen} C + \cos C \cos a = \cot b \operatorname{sen} a$ fra $B,\ C,\ a,\ b$
$(8)\ \cot B \operatorname{sen} A + \cos A \cos c = \cot b \operatorname{sen} c$ $\quad B,\ A,\ c,\ b$
$(9)\ \cot C \operatorname{sen} B + \cos B \cos a = \cot c \operatorname{sen} a$ $\quad C,\ B,\ a,\ c$
$(10)\ \cot C \operatorname{sen} A + \cos A \cos b = \cot c \operatorname{sen} b$ $\quad A,\ C,\ b,\ c$

$$(11)\ \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}\ ; \quad (12)\ \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}$$

$$(13)\ \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}\ .$$

Essendo le formule precedenti generali, esse comprendono, come caso particolare, la soluzione dei triangoli rettangoli. Ponendo l'angolo $A = 90°$, avremo in questo caso particolare le seguenti equazioni, ciascuna delle quali deriva dalla corrispondente superiore, cui si è apposto un apice in alto per comodo delle citazioni.

$(1)'\ \cos a = \cos b \cos c\ ;$ $\quad (4)'\ \operatorname{sen} a = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$

$(5)'\ \cos B \cos c = \cot a \operatorname{sen} c$, ovvero $\cos B = \cot a \operatorname{tang} c$

$(6)'\ \cos C = \cot a \operatorname{tang} b\ ;$ $\quad (8)'\ \cot B = \cot b \operatorname{sen} c$

$(10)'\ \cot C = \cot c \operatorname{sen} b\ ;$ $\quad (11)'\ \cos a = \cot B \cot C$

$(12)'\ \cos b = \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} C}\ ;$ $\quad (13)'\ \cos c = \dfrac{\cos C}{\operatorname{sen} B}$

Posto ciò, passiamo alla

Risoluzione dei triangoli sferici rettangoli.

XIV. *Caso I.* Data l'ipotenusa a, ed un lato b, trovare $B,\ C,\ c$.

Soluz. Si avrà $\operatorname{sen} B = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}$; $\cos C = \operatorname{tang} b \cot a$; $\cos c = \dfrac{\cos a}{\cos b}$; l'ambiguità che havvi in B, perchè un dato seno può appartenere a due archi diversi, sarà tolta dall'osservare, che in virtù della $(8)'$ B e b devono essere della stessa specie, vale a dire o acuti insieme, o ottusi insieme.

Caso II. Essendo dati i due lati $b,\ c$ dell'angolo retto, trovare l'ipotenusa, e gli angoli $B,\ C$.

Soluz. Si avrà $\cos a = \cos b \cos c$; $\cot B = \cot b \operatorname{sen} c$; $\cot C = \cot c \operatorname{sen} b$; ed in questo caso osservando le regole dei segni non vi sarà alcuna ambiguità.

Caso III. Essendo dato l'ipotenusa a, ed un angolo B, trovare $b,\ c,\ C$.

Soluz. Sarà $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$; $\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B\ \ldots\ (5)'$ $\cot C = \cos a \operatorname{tang} B\ \ldots\ (11)'$. Il lato b determinato per un seno dovrà essere preso della stessa specie di B.

Caso IV. Essendo dato il lato b coll' angolo opposto B, trovare a, c, C.

Soluz. Si avrà $\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$; $\operatorname{sen} c = \operatorname{tang} b \cot B$ . . . (8)'

$\operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b}$ . . . (12)'. Questo caso ammette doppia soluzione, essendo le quantità incognite determinate per seni.

Caso V. Essendo dato b coll' angolo adjacente C, si domandano a, c, B.

Soluz. $\cot a = \cot b \cos C$; $\operatorname{tang} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tang} C$; $\cos B = \operatorname{sen} C \cos b$.

Caso VI. Dati i due angoli B, C, si domandano i lati.

Soluz. Sarà $\cos a = \cot B \cot C$; $\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$; $\cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}$.

Uniremo qui il seguente triangolo rettangolo, sopra il quale potranno esercitarsi i giovani studiosi.

$B = 23° \; 27' \; 42''$; $C = 71° \; 50' \; 2''$;
$a = 40 \; 53 \; 6$; $b = 15 \; 6 \; 20$; $c = 38° \; 27' \; 23''$.

Risoluzione dei triangoli sferici obbliquangoli.

XV. *Caso I.* Dati i tre lati d'un triangolo sferico a, b, c si domandano i tre angoli A, B, C.

Soluz. Pongasi $a + b + c = 2p$, è facile vedere che i valori di $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} A$ ec. esposti agli artic. XI, XII divengono i seguenti

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-c)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}\,; \quad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-c)\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}}\,; \quad \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}}$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}\,; \quad \cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}$$

le quali formule sono molto comode, e risolvono completamente il quesito.

Caso II. Essendo dati due lati a, b, con l'angolo A opposto ad a, si domandano B, C, c.

Soluz. 1. Sarà B dato dall'equazione $\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}$ sol. ambig.

2. L'angolo C sarà dato dall'equazione (6) del § XIII, che è la seguente $\cot A \operatorname{sen} C + \cos C \cos b = \cot a \operatorname{sen} b$, la quale considerando $\operatorname{sen} C$, come incognita sarebbe di secondo grado. Si può risolvere facilmente mediante un angolo ausiliario nel seguente modo. Pongasi $\cot A = \cos b \cot \varphi$, e la nostra equazione, fatte le opportune riduzioni,

si cambierà nella seguente $\text{sen}\,(C+\varphi)=\frac{\text{tang}\,b\,\text{sen}\,\varphi}{\text{tang}\,a}$, essendo φ determinato dall'equazione $\text{tang}\,\varphi=\cos b\,\text{tang}\,A$. Si calcolerà prima il valore di φ, e dietro questo quello di $C+\varphi$, donde si otterrà C.

3. Troverassi poi il lato c dall'equazione (1) scritta sotto la seguente forma, $\cos b\cos c+\cos A\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c=\cos a$, la quale, ponendo $\cos b\,\text{tang}\,\varphi=\cos A\,\text{sen}\,b$, ovvero $\text{tang}\,\varphi=\cos A\,\text{tang}\,b$, si riduce a $\cos(c-\varphi)=\frac{\cos a\cos\varphi}{\cos b}$. Conosciuto dalla precedente equazione il valore di φ, si avrà da quest'ultima il valore di $c-\varphi$, e quindi quello di c. È inutile avvertire, non doversi il presente angolo ausiliario φ confondere col precedente.

Caso III. Dati i due lati a, b con l'angolo compreso C, trovare i due angoli A, B, ed il terzo lato c.

Soluz. 1. Gli angoli A, B si troveranno mediante le formule (A) di Nepero, come si è detto al § XII, ed il lato c si troverà per la formula $\text{sen}\,c=\text{sen}\,a\frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}=\text{sen}\,b\frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,B}$, ovvero per la formula $\cos c=\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\cos C$, la quale corrisponde alla terza del § XIII.

2. Si possono ancora gli angoli A, B, ed il lato c trovare per le le seguenti equazioni del § XIII:

(6) $\cot A=\frac{\cot a\,\text{sen}\,b-\cos C\cos b}{\text{sen}\,C}$; (7) $\cot B=\frac{\cot b\,\text{sen}\,a-\cos C\cos a}{\text{sen}\,C}$

(3) $\cos c=\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\cos C$,

le quali formule si possono ridurre ad una forma comoda al calcolo logaritmico coll'ajuto di un angolo ausiliario. Si voglia, a cagion d'esempio, trovare l'angolo A, ed il lato c. Pongasi $\cot a=\cos C\cot\varphi$, ovvero $\text{tang}\,\varphi=\cos C\,\text{tang}\,a$; calcolato mediante questa equazione l'angolo φ, otterrassi

$$\cot A=\cot C\frac{\text{sen}\,(b-\varphi)}{\text{sen}\,\varphi};\quad \cos c=\frac{\text{sen}\,a\cos(b-\varphi)\cos C}{\text{sen}\,\varphi}.$$

Così con uno stesso angolo ausiliario φ si otterranno comodamente A, c. Che se l'ultima equazione dividesi per $\text{sen}\,c=\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}$; ed il quoto dividasi poi per $\cot A=\cot C\frac{\text{sen}\,(b-\varphi)}{\text{sen}\,\varphi}$, si otterrà comodissimamente c per l'equazione $\cot c=\cos A\cot(b-\varphi)$.

Ecco dunque le formule che si dovranno calcolare per trovare A, c in questo nostro caso

(1) $\text{tang}\,\varphi=\cos C\,\text{tang}\,a$

(2) $\cot A = \dfrac{\cot C \operatorname{sen}(b - \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$; (3) $\cot c = \cos A \cot(b - \varphi)$;

le quali sono più spedite di quelle di Nepero, quando non si cerchino che A, c.

Caso IV. Dati A, B, c, trovare a, b, C.

Soluz. 1. I lati a, b si calcoleranno colle formule (B) di Nepero, come si è indicato al § XII. Quanto all'angolo C, si otterrà o dall'equazione $\operatorname{sen} C = \dfrac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$, ovvero dalla seguente $\cos C = \cos c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos B$, la quale mediante un angolo ausiliario φ calcolato con l'equazione $\cot\varphi = \cos c \operatorname{tang} A$ si riduce a $\cos C = \dfrac{\cos A \operatorname{sen}(B - \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$.

2. Si possono le quantità incognite ottenere eziandio per le seguenti equazioni del § XIII.

(5) $\cot a = \dfrac{\cot A \operatorname{sen} B + \cos B \cos c}{\operatorname{sen} c}$; (8) $\cot b = \dfrac{\cot B \operatorname{sen} A + \cos A \cos c}{\operatorname{sen} c}$

(13) $\cos C = \cos c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos B$.

Se non si voglia calcolare che un solo lato a, per es., e l'angolo C, allora non sarà necessario che un solo angolo ausiliario, e con una analisi simile a quella del caso precedente si otterranno le quantità cercate col mezzo delle seguenti formule

(1) $\cot\varphi = \cos c \operatorname{tang} A$

(2) $\cot a = \dfrac{\cot c \cos(B - \varphi)}{\cos\varphi}$; (3) $\cot C = \cos a \operatorname{tang}(B - \varphi)$.

Caso V. Essendo dati due angoli A, B col lato a opposto ad A, si domandano b, c, C.

Soluz. 1. Si avrà b dall'equazione $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \dfrac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$.

2. Il lato c dipende dall'equazione (5) § XIII, che si può scrivere così $\cot a \operatorname{sen} c - \cos B \cos c = \cot A \operatorname{sen} B$, dalla quale si otterrà c mediante un angolo ausiliario determinato da $\operatorname{tang}\varphi = \cos B \operatorname{tang} a$, col quale essa diviene $\operatorname{sen}(c - \varphi) = \dfrac{\operatorname{tang} B \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{tang} A}$.

3. L'angolo C si otterrà dall'equazione $\cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C = \cos A$, la quale ponendo $\cot\varphi = \cos a \operatorname{tang} B$ diviene $\operatorname{sen}(C - \varphi) = \dfrac{\cos A \operatorname{sen}\varphi}{\cos B}$.

Questo quinto caso, come il secondo, è suscettibile di due soluzioni.

Caso VI. Dati i tre angoli A, B, C, trovare i tre lati a, b, c.

Soluz. Servono a ciò le formule (11), (12), (13) del § XIII, in

luogo delle quali è più comodo adoperare i valori di $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$ ec. dedotti al § XI. Ponendo pertanto $A+B+C=2P$, avremo

$$(1)\quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}};\ \cos\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

$$(2)\quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}b=\sqrt{-\frac{\cos P\cos(P-B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}};\ \cos\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}}$$

$$(3)\quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c=\sqrt{-\frac{\cos P\cos(P-C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}};\ \cos\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}}$$

Servirà per il solito esercizio dei casi sovra esposti il seguente triangolo sferico:

$A=60°\ 6'\ 48'',6$ $\quad B=66°\ 10'\ 18'',0$ $\quad C=114°\ 22'\ 3'',0$
$a=66\ \ 33\ \ \ 0,0$ $\quad b=75\ \ 27\ \ \ 0,0$ $\quad c=105\ \ 27\ \ \ 0,0$

Delle relazioni differenziali fra gli elementi del triangolo sferico, e risoluzione di alcuni casi particolari più comuni della Trigonometria.

XVI. Accade spesse volte che siasi eseguita la soluzione esatta di un triangolo sferico, di cui erano dati tre elementi, e che si desideri la soluzione di un altro triangolo sferico, i di cui elementi dati pochissimo differiscano da quelli del precedente già risoluto. In allora egli è chiaro che risolvendo il ~~secondo triangolo~~, gli elementi incogniti risulterebbero essi pure pochissimo differenti da quelli trovati nel primo triangolo, ed in conseguenza le differenze fra gli elementi corrispondenti dei due triangoli resteranno sempre molto piccole. Quando pertanto esse sieno talmente piccole, che le loro seconde dimensioni sieno trascurabili, tali differenze potranno essere sempre riguardate come differenziali, e quindi esprimendo i differenziali degli elementi incogniti per quelli degli elementi cogniti, avremo delle equazioni, col mezzo delle quali potremo facilmente calcolare questi incogniti differenziali, che aggiunti algebraicamente agli elementi calcolati del primo triangolo daranno senza altro calcolo gli elementi incogniti del secondo. Un tal modo di procedere serve non solo a valutare l'influenza, che aver può sopra alcuni elementi del triangolo la variazione piccolissima di alcuni altri elementi, ma eziandio è quasi sempre preferibile alla soluzione diretta nell'ipotesi di due triangoli poco fra loro diversi, di cui siasi già il primo risoluto, perchè laddove quella esige tavole estese, e molta diligenza di calcolo, questa per lo contrario richiede sempre minori tavole, e minor fatica. Si rende pertanto importante d'investigare le relazioni fra i differenziali degli elementi del triangolo. A tale oggetto ponghiamo le equazioni (1), (2), (3) del § XIII sotto la forma

$$(1)\ \ldots\ \cos a=\cos b\cos c+\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c\cos A$$

(2) . . . $\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B$

(3) . . . $\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$

Differenziando ora la prima equazione, si otterrà

$$da \operatorname{sen} a = db(\cos c \operatorname{sen} b - \cos b \operatorname{sen} c \cos A) + dc(\operatorname{sen} c \cos b - \cos c \operatorname{sen} b \cos A) + dA \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c .$$

Ai coefficienti di db e di dc può darsi ancora un' altra forma molto comoda; infatti si ha

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C, \text{ e } \operatorname{sen} c \cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\operatorname{sen} b},$$

e ponendo in quest'ultima equazione in luogo di $\cos c$ il suo valore, troviamo $\operatorname{sen} c \cos A = \cos a \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \cos b \cos C$.

Sostituiti questi valori di $\cos c$, e di $\operatorname{sen} c \cos A$ nel coefficiente di db, esso si riduce a $\operatorname{sen} a \cos C$.

Con analoghe riduzioni il coefficiente di dc si riduce a $\operatorname{sen} a \cos B$.

Dividendo pertanto l'equazione differenziale per $\operatorname{sen} a$, otterremo

$$(a) \ldots da = db \cos C + dc \cos B + dA \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a},$$

ove in virtù dell' equazione (4) del § XIII si avrà

$$\frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a} = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C.$$

I differenziali delle equazioni (2), (3) daranno del pari

$$(b) \ldots db = da \cos C + dc \cos A + \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} dB,$$

essendo $\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$;

$$(c) \ldots dc = \cos B \, da + \cos A \, db + \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} dC;$$

ove sarà ancora $\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$.

Dalla combinazione di queste tre equazioni potremo sempre dedurre le espressioni di tre qualunque delle sei variazioni da, db, dc, dA, dB, dC, date che sieno le altre tre, osservando che se qualche elemento del triangolo rimane costante, la sua variazione è zero, e le precedenti formule si riducono più semplici.

Per dare un' applicazione di queste formule, supponiamo che si domandino i valori di da e dB, essendo c costante, ed essendo date dA, db. Avremo in tal caso $dc = 0$, e l' equazione (a) darà direttamente $da = \cos C \, db + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C \, dA$. Sostituito questo valore in (b), ed osservando che $\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} b} = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$, avremo

dopo le opportune riduzioni $dB = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} a} db - \frac{\cos C \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} dA$.

XVII. Occorre frequentemente, ed in particolare nell'alta Geodesia, di dover risolvere i triangoli sferici nei due seguenti casi:

1. Dati i tre lati d'un triangolo sferico, due dei quali molto si avvicinino a 90°, domandasi l'angolo fra essi compreso.

2. Dati tre qualunque elementi d'un triangolo sferico, i di cui tre lati sieno piccolissimi in confronto del raggio della sfera, si domandano gli altri tre elementi.

Quantunque si possano sempre, anche in questi casi, adoperare le formule generali date di sopra, tuttavia si può pervenire nel primo caso ad una formula approssimata più comoda al calcolo numerico, e nel secondo caso si può ridurre la soluzione del triangolo sferico a quella di un triangolo rettilineo mediante un elegantissimo teorema dovuto al celebre geometra Le-Gendre.

Per risolvere ora il primo caso proposto, sieno i lati a, b molto vicini a 90°, e si cerchi l'angolo C, quando inoltre sia dato c. Se fosse $a = b = 90°$, sarebbe $C = c$, e differendo a, b poco da 90°, C poco differirà da c. Pongasi pertanto

$$a = 90° - \alpha; \qquad b = 90° - \beta; \qquad C = c + x;$$

e l'equazione $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{\cos c - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$

trascurate le potenze di quarto ordine diverrà

$$\cos c - x \operatorname{sen} c = \frac{\cos c - \alpha\beta}{1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} = (\cos c - \alpha\beta)\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right),$$

e quindi $x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\cos c}{\operatorname{sen} c}$, donde apparisce che x è di secondo ordine relativamente ad α, β, e perciò nel valore di $\cos C = \cos(c + x)$ legittimamente abbiamo potuto trascurare x^2, x^3, che sarebbero stati di 4, 6 ordine. Ora al valore di x si può dare anche un'altra forma più comoda. In fatti se pongasi $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = p$, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = q$, cosicchè sia $\alpha = p + q$, $\beta = p - q$, avremo $\alpha\beta = p^2 - q^2$, e $\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) = p^2 + q^2$. Quindi si otterrà

$$x = p^2 \frac{1 - \cos c}{\operatorname{sen} c} - q^2 \frac{1 + \cos c}{\operatorname{sen} c} = p^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - q^2 \cot \tfrac{1}{2} c.$$

Questo valore è espresso in parti del raggio; ma siccome in pratica p, q sono espresse in minuti secondi, così se si vorrà pure x espresso in secondi, converrà dividere il secondo membro per il numero dei secondi contenuti nel raggio, che rappresenteremo per r''. Così sarà in secondi $x = \frac{p^2}{r''} \operatorname{tang} \frac{1}{2} c - \frac{q^2}{r''} \cot \frac{1}{2} c$, essendo $\log r'' = 5{,}3144251$.

Per calcolare il valore di x da questa formula basterà adoperare quattro o cinque cifre decimali, ed aggiungendo secondo il suo segno il trovato x al lato c si avrà con precisione il valore di C, purchè α, β non superino due o tre gradi; che se eccedessero questi limiti, sarebbe più sicuro il trovarlo colle formule generali del primo caso.

Dei triangoli sferici, i cui lati sono piccolissimi in confronto del raggio.

XVIII. Siano a, b, c tre lati d'un triangolo sferico disegnato in una sfera di raggio r, ed i suoi angoli siano al solito A, B, C. Allorchè i lati son piccolissimi in confronto di r, il triangolo molto si avvicina ad esser rettilineo, e come tale si può il più delle volte trattare. In questa maniera però si viene a trascurare l'eccesso dei suoi tre angoli A, B, C sopra due retti, e per avere una soluzione più esatta convien tener conto di un tale eccesso, lo che si può facilmente fare col mezzo del teorema del signor Le-Gendre, che andiamo ad esporre.

Immaginiamoci che nella sfera di raggio $= 1$ sia disegnato un triangolo simile al dato, di cui sono a, b, c i lati, ed a tale oggetto se concentrica alla sfera di raggio r descriviamo col raggio $= 1$ una seconda sfera, ed in seguito dal centro conduciamo tre raggi agli angoli A, B, C taglieranno questi la seconda in tre punti, i quali uniti con tre archi di circolo massimo daranno il secondo triangolo simile al primo, i di cui lati saranno evidentemente $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, e gli angoli A, B, C. Ora in questo secondo triangolo avremo

$$\cos A = \left(\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\right) : \operatorname{sen}\frac{b}{r}\operatorname{sen}\frac{c}{r}.$$

Se in luogo dei coseni e seni degli archi molto piccoli $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ sostituiamo i loro sviluppi in serie, e trascuriamo le potenze superiori alle quarte, otterremo

$$\cos A = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}\right) : \frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2}{6r^2} - \frac{c^2}{6r^2}\right).$$

Moltiplicando i due termini di questa frazione per $1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}$, trascurando sempre le potenze superiori alla quarta, e riducendo otterremo

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}.$$

Sia ora A' l'angolo opposto al lato a nel triangolo rettilineo, di cui i lati sieno a, b, c. Egli è evidente essere $\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, e quindi $\operatorname{sen}^2 A' = -\frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4b^2c^2}$. Introdotti questi valori nell'equazione precedente, si avrà $\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen}^2 A'$. Si vede pertanto, che $\cos A$ differisce da $\cos A'$ di una quantità di secondo ordine, e perciò ponendo $A = A' + x$ potremo trascurare le potenze di x superiori alla prima. Avremo così $\cos A = \cos A' - x \operatorname{sen} A'$, che confrontato colla precedente equazione darà $x = \frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen} A'$, e quindi $A = A' + \frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen} A'$.

Frattanto è facile vedere, che $\frac{1}{2}(bc)\operatorname{sen} A'$ è l'area del triangolo rettilineo, la quale senza errore sensibile si confonde con quella del triangolo sferico. Ponendo dunque o questa o quella $= \alpha$, avremo $A' = A - \frac{\alpha}{3r^2}$. Con un ragionamento analogo si otterrà $B' = B - \frac{\alpha}{3r^2}$; $C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}$, cosicchè $A' + B' + C' = 180° = A + B + C - \frac{\alpha}{r^2}$.

Si potrà dunque considerare $\frac{\alpha}{r^2}$ come l'eccesso dei tre angoli del triangolo sferico sopra due retti. Ciò posto verrà a conseguirsi il seguente teorema notabile, che riduce la risoluzione dei triangoli sferici piccolissimi a quella dei triangoli rettilinei.

»Essendo proposto un triangolo sferico, i di cui lati sono piccolissimi rapporto al raggio della sfera, se da ciascuno dei suoi tre angoli si toglie il terzo dell'eccesso sopra i due retti, gli angoli così diminuiti potranno esser presi per gli angoli di un triangolo rettilineo, i cui lati sono eguali in lunghezza a quelli del proposto triangolo sferico»; o in altri termini:

»Il triangolo sferico pochissimo curvo, i cui angoli sono A, B, C, ed i lati a, b, c corrisponde sempre ad un triangolo rettilineo, che ha i lati della medesima lunghezza a, b, c, ed i cui angoli sono $A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C - \frac{1}{3}\varepsilon$, essendo ε l'eccesso de' tre angoli A, B, C sopra due retti».

Scolio. L'eccesso $\varepsilon = \frac{\alpha}{r^2}$ si può sempre calcolare *a priori* coi dati del triangolo sferico considerato come rettilineo. Così, per esempio, se i due lati b, c e l'angolo A sono dati, sarà l'area $\alpha = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$. Se poi sono dati un lato a, e gli angoli B, C ad-

iacenti, troverassi l'espressione dell'area $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \frac{\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C}{\text{sen}\,(B+C)}$. Trovato poi α, sarà $\iota = \frac{\alpha}{r^2}$, ove converrà osservare, che i lati del triangolo ed il raggio r della sfera devono essere espressi nella stessa unità di misura lineare, nel qual caso la quantità $\frac{\alpha}{r^2}$ sarà un numero astratto, che dovrà ridursi in minuti secondi, quando gli angoli A, B, C sono dati in gradi, minuti e secondi. Chiamando pertanto r'' il numero dei secondi contenuti nel raggio, sarà ι espresso in secondi $= \frac{r''}{r^2}\,\alpha$.

Il numero $\frac{r''}{r^2}$ per i triangoli disegnati in una medesima sfera è costante. Così per i triangoli disegnati nella superficie terrestre, se i loro lati siano espressi in metri, avremo $\log r = 6,80388$, e quindi $\log \frac{r''}{r^2} = 1,70666 - 10$. E se i lati siano espressi in tese francesi, avremo $\log r = 6,51406$; $\log \frac{r''}{r^2} = 2,28630 - 10$.

Le cose dette fin qui sono bastanti per i frequenti usi della Trigonometria nell'Astronomia. Chi desiderasse per altro una maggior estensione, dovrà ricorrere ai Trattati di Trigonometria, e specialmente a quelli del signor cav. Cagnoli e del signor Le-Gendre.

Osservazione. Noi abbiamo supposto i triangoli sferici formati sempre dall'incontro di archi di circolo massimo sulla superficie della sfera, ed in questa sola condizione si avverano i precetti dati nei §§ precedenti. Havvi un caso in Astronomia comunissimo, quello cioè di dover risolvere un triangolo sferico di lati piccolissimi, e tali che considerare si possono come linee rette. Siccome il più delle volte uno dei lati è un piccolo arco di circolo minore, simile ad un arco dato di circolo massimo, così prima di accingersi alla risoluzione del medesimo è necessario ridurre l'arco di circolo massimo a quello di un circolo minore ad esso parallelo, e di un medesimo numero di gradi. Siano perciò i due archi simili Bb, EF (*Fig.* 3) compresi fra i circoli ABD, AbD, e descritti cogli stessi poli A, D. Condotte le perpendicolari BC, Ec sull'asse AD, saranno C, c i centri dei due archi Bb ed EF, dei quali il primo lo supporremo appartenere al circolo massimo descritto col polo A. Essendo essi simili avremo dalla Geometria la proporzione $Bb : EF :: BC : Ec$. Ponendo ora $Bb = G$; $EF = g$, BC raggio della sfera $= 1$; $BE = \delta$, sarà $Ec = \text{sen}\, AE = \cos\delta$, e però dalla proporzione precedente dedurremo la seguente equazione

$g = G \cos \delta$, la quale ci annunzia, *che un arco di circolo minore è uguale all' arco simile del circolo massimo ad esso paralello moltiplicato per il coseno dell' arco di circolo massimo intercetto fra essi, ad ambedue perpendicolare*. Viceversa, se sia dato l'arco g di un circolo minore paralello ad un massimo, e da esso distante di δ, sarà l'arco corrispondente G del circolo massimo dato dall'equazione $G = \frac{g}{\cos \delta}$.

CAPITOLO I.

Della sfera celeste e dei suoi circoli; loro uso nel determinare la posizione degli astri.

1. Rimirando il cielo in una bella notte scorgesi un indefinito numero di corpi luminosi, come attaccati ad una superficie sferica. Chi ben li osserva facilmente si accorge ch' essi sono dotati di un movimento, poichè sempre ne vede comparire dei nuovi all'oriente, alzarsi, quindi discendere, finchè spariscono all'occidente. Osservando attentamente questi movimenti non si tarda a riconoscere, che sono essi comuni a tutti i corpi celesti, che si fanno sempre nella stessa direzione d'oriente in occidente, con celerità costante. Questa uniformità di direzione fa tosto sospettare tali movimenti non essere prodotti da una forza parzialmente impressa a ciaschedmno, ma bensì dovere dipendere da una causa semplice, la quale agisca su tutti egualmente. L'indagine del principio, da cui tali moti dipendono, sarà riservata pel seguito; ora colla guida della semplice osservazione procureremo di ordinare, e disporre in classi questa immensa moltitudine di corpi, che ci girano intorno.

2. Tutti i corpi celesti indistintamente, che principiano a vedersi allo sparire del Sole descrivono dei circoli fra loro paralelli in questa volta celeste che ci circonda, continuando a vedersi finchè ritorna il Sole sopra l'orizzonte. Essi principiano a comparire ad oriente, s'inalzano a mano a mano, e giunti alla massima loro elevazione principiano a discendere inversamente per gli stessi gradi, per cui salirono, finchè poi spariscono all'occidente. Se avanti il loro tramonto la chiara luce del Sole ce ne toglie la vista, non è già da credersi che vengano essi estinti; ma cessiamo di vederli solo perchè la luce del Sole più forte non lascia percepire il loro debole splendore, del che restiamo solidamente convinti seguendoli, dopo l'apparire del Sole, con un forte cannocchiale. Tutti gli astri descrivono regolarmente i loro circoli nello stesso tempo, poichè si è osservato, che se due stelle perven-

gono in una data sera alla loro massima elevazione contemporaneamente, se appariscono o spariscono insieme, giungono alle stesse rispettive posizioni contemporaneamente nelle sere successive. Questa osservazione generale soffre per alcuni un' eccezione, ma siccome il numero degli astri, che a questa contraddicono, è assai piccolo, così potremo da principio farne astrazione.

Descrivendo pertanto le stelle dei circoli fra loro paralelli, è evidente dalla Geometria, che quanto più i loro piani si discosteranno dal centro della sfera, tanto più andranno diminuendo, finchè si riducano ad essere uguali a zero. Quelle stelle che sono collocate in regioni tali della sfera celeste da descrivere circoli di più in più piccoli, dovendo percorrerli nello stesso tempo di quelle che percorrono circoli maggiori, hanno una minore velocità. In tal guisa quelle che esistono nell'ultimo pnnto della sfera celeste descrivendo un circolo di raggio zero, dovranno eternamente restare in quiete.

3. Per rappresentarci in qualche modo più chiaramente questi movimenti immaginiamo, che per il centro della sfera celeste nella direzione del moto degli astri sia condotto un piano, e pel centro stesso della sfera sia condotta ad esso piano una perpendicolare. Egli è evidente, 1.° che le stelle descriventi il circolo formato nella sfera celeste dall'intersezione dell'anzidetto piano facendo il più lungo cammino, hanno la massima celerità; 2.° che i centri dei circoli descritti dalle altre stelle sono tutti situati in questa linea; 3.° che le stelle situate negli estremi della medesima sono immobili.

4. Ciò premesso, chiamasi *equatore* quel circolo, che supponesi nella volta celeste tracciato dall'intersezione del piano condotto pel centro della sfera nella direzione del moto degli astri. La perpendicolare condotta pel centro dell'equatore chiamasi *asse del mondo*, le sue due ultime estremità chiamansi *poli del mondo*, o *poli dell'equatore*. Quello che è posto dalla nostra parte chiamasi *polo boreale*, o *settentrionale*, od anche *polo nord*. L'altro a lui diametralmente opposto chiamasi *polo australe*, o *meridionale*, o anche *polo sud*. Oltre le riferite denominazioni ottengono eziandio quelle di *polo artico*, e *polo antartico*, corrispondendo il primo al polo boreale, il secondo al polo australe. Un circolo massimo della sfera celeste, che passa per i due poli dell'equatore, chiamasi *circolo di declinazione*. Dei circoli di declinazione ve ne sono pertanto infiniti, ed essi sono tutti perpendicolari all'equatore.

5. La terra che noi abitiamo è anch'essa all'incirca di figura sferica. Ciò si prova con molte osservazioni; la più semplice, che cade a tutti sott'occhio, è la seguente. Si è osservato, che andando dal nord al sud si scuoprono sempre delle nuove stelle dalla parte del sud, e se ne nascondono dalla parte del nord. Questa osservazione sempli-

cissima ci prova, che la terra non può esser piana, giacchè se tal fosse, non si dovrebbero nasconder delle stelle, e scuoprirne delle nuove comunque si andasse sopra di essa. La figura più semplice, e che soddisfa all' incirca alle ulteriori osservazioni, che qui fra poco esporremo, è la sferica, il centro della terra essendo lo stesso di quello della volta celeste.

Ciò ben inteso, immaginiamoci per il centro della terra, e dell'osservatore condotta una linea indefinitamente prolungata fino al cielo stellato; e che pel centro medesimo sia condotto un piano perpendicolare a questa stessa linea, e sia prolungato fino ad incontrare la sfera celeste. Il circolo, che tal piano traccia nella volta celeste, chiamasi *orizzonte*, ed è quello che un osservatore in luogo libero ed aperto girando intorno a se stesso descrive col suo raggio visuale radendo il limite visibile della sfera celeste. La perpendicolare all' orizzonte, poco fa nominata, chiamasi *asse dell' orizzonte*, i suoi estremi sono i suoi poli, dei quali il superiore è appellato *zenit*, l' inferiore a questo diametralmente opposto chiamasi *nadir*. Siccome l' orizzonte e l' equatore sono due circoli massimi della sfera celeste, essi si tagliano in un diametro della medesima. I punti, che nella sfera celeste corrispondono a questa intersezione, chiamansi *punti di vero oriente*, e *di vero occidente*. Il primo trovasi dalla parte ove sorgono le stelle, ed il secondo ove tramontano.

Finalmente se pei poli dell' equatore, e per lo zenit si conduce un circolo massimo della sfera celeste, sarà esso perpendicolare all' equatore ed all' orizzonte, dividerà per metà gli archi diurni descritti dalle stelle in virtù del loro moto diurno. Così quando gli astri saranno giunti a questo circolo massimo, saranno alla metà del loro giro diurno, e per questa ragione chiamasi *meridiano*.

6. Apparisce dal fin qui detto, che l' equatore è un circolo, la di cui posizione è indipendente dalla posizione dell' osservatore nella superficie della terra. L' orizzonte poi ed il meridiano variano col variare di questa posizione. Immaginiamoci un osservatore che viaggi dal nord al sud sempre sotto il medesimo meridiano. Il suo orizzonte si va alzando dalla parte del nord, ed abbassando continuamente dalla parte di mezzogiorno, perde continuamente delle stelle al nord, ne vede di nuove al sud. Supponiamo, che egli abbia percorsa tanta superficie terrestre, quanta ne abbisogna per far alzare l' orizzonte di un grado. Continuando a camminare nella stessa direzione si è osservato che per farlo alzare di un altro grado convien correre uno spazio uguale al primo, e così di seguito. Da questa osservazione semplicissima segue, che la terra è di figura presso che sferica. La grandezza dei suoi circoli massimi è $= 360$ volte la lunghezza del grado misurato. Si è trovato così, che la periferia della terra è all' incirca 9000 leghe di Francia.

7. Chiamasi *altezza di polo* l'arco di meridiano compreso fra il polo e l'orizzonte. Quest'arco è uguale all'arco dello stesso meridiano compreso fra il zenit e l'equatore, poichè tutti due sono complementi della distanza del zenit dal polo. La distanza del zenit dall'equatore si chiama eziandio *latitudine geografica* dell'osservatore, ed essa è *australe*, se l'osservatore è situato fra l'equatore ed il polo sud; è *boreale* se è situato fra l'equatore ed il polo nord.

È evidente da ciò che precede, che il polo tanto più si abbassa verso l'orizzonte quanto più ci avviciniamo all'equatore, finchè sotto l'equatore il polo trovasi nell'orizzonte stesso, ed allora l'orizzonte diventa un circolo massimo che passa per i due poli, ed in conseguenza egli è perpendicolare all'equatore. Allontanandosi poi dall'equatore verso il polo boreale, l'orizzonte s'inclina di più in più all'equatore, il polo boreale si eleva sopra il medesimo, e di altrettanto si deprime il polo australe, finchè arrivati sotto il polo stesso l'orizzonte si confonde con l'equatore. Simili fenomeni hanno luogo andando verso il polo australe.

8. Abbiamo detto, che quasi tutti gli astri nascono e tramontano ad uno stesso luogo dell'orizzonte in ogni tempo; si è di più osservato, che quegli astri, i quali nascono allo stesso luogo, conservano sempre fra loro le medesime distanze angolari, e le stesse relative posizioni. Ciò non può essere, se non supponendoli privi di ogni moto particolare, e quindi non avranno essi altro moto che il diurno, o un altro a tutti comune, che con quello si componga. Il non aver tali astri dei movimenti particolari ha fatto sì, che ad essi siasi dato il nome di *stelle fisse*. Vi sono per altro alcuni astri in cielo, i quali non sempre nascono allo stesso luogo, nè tampoco conservano fra loro, e con gli altri la stessa posizione. I punti del loro nascere e tramontare, come anche le loro posizioni ora sono sopra l'equatore verso il polo boreale, ora al disotto verso il polo australe. Questi astri hanno adunque oltre il moto diurno un altro movimento loro particolare che li distingue. Il non trovarsi essi costantemente alla stessa posizione ha fatto dar loro il nome di *pianeti*, che vuol dire erranti. I più grandi (ai nostri occhi) sono il *Sole* e la *Luna*. Vengono poi *Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno, Urano*. Un'esatta osservazione del cielo ne ha fatto scoprire in questi ultimi tempi degli altri molto più piccoli ed invisibili ad occhio nudo. Sono essi *Vesta, Cerere, Giunone* e *Pallade*.

9. Il Sole, in faccia al cui splendore tutti gli astri spariscono, oltre il moto diurno ha un altro movimento suo proprio. Vedremo in appresso il modo di osservare e determinare questo movimento. Frattanto supponiamo quello che sarà in seguito dimostrato: 1.° che il moto del Sole si faccia in un circolo; 2.° che il piano di questo cir-

colo sia inclinato all' equatore di 23° 28′ circa; 3.° che egli passi per il centro della sfera celeste come il piano dell' equatore.

Ciò presupposto è facile il vedere, che la sezione del piano, in cui il Sole si muove, con la sfera celeste sarà un circolo massimo della sfera inclinato all' equatore di 23° 28′, metà del quale giacerà nell' emisfero boreale, e metà nell' emisfero australe.

Questo circolo si chiama *ecclittica;* una perpendicolare condotta pel centro dell' ecclittica al suo piano chiamasi *asse dell' ecclittica*, ed i suoi estremi si chiamano *poli dell' ecclittica*. La sua inclinazione all' equatore (che è uguale all' angolo che gli assi dell' equatore e dell' ecclittica fanno fra loro) chiamasi *obbliquità dell' ecclittica*. L' intersezione del piano dell' ecclittica coll' equatore dicesi *linea degli equinozi*. Quel punto di equatore, in cui trovasi il Sole verso il 21 di Marzo passando dall' emisfero australe nel boreale, chiamasi *equinozio di primavera; equinozio d' autunno* chiamasi quel punto comune all' equatore ed all' ecclittica, ove trovasi il Sole passando dall' emisfero boreale nell' australe, lo che accade verso il 22 Settembre.

10. I piani finora da noi menzionati sono i principali che gli astronomi considerano nella sfera celeste, e ad essi riferiscono la posizione di tutti gli astri, affine di poterli riconoscere in ogni occasione. Essi si riferiscono ora all' equatore, ora all' ecclittica, ed anche talvolta all' orizzonte. Prendiamo di mira un astro qualunque, e riferiamolo a ciascuno di questi tre piani.

1.° Per i poli dell' equatore, e per l' astro dato si faccia passare un circolo massimo. Questo circolo taglierà ad angolo retto l' equatore in un punto determinato e dipendente dalla posizione dell' astro. Ciò posto, chiamasi *ascensione retta di quell' astro* l' arco di equatore compreso fra l' equinozio di primavera e l' intersezione del medesimo equatore col circolo condotto per l' astro e pei poli; essa contasi da 0° fino a 360° da occidente verso l' oriente. Chiamasi *declinazione dell' astro* l' arco di circolo massimo che passa per l' astro, intercetto fra esso e l' equatore. Se la stella è nell' emisfero boreale, la declinazione dicesi *boreale* o *positiva;* se nell' emisfero australe, dicesi *australe* o *negativa*, perchè relativamente all' equatore cade in senso contrario.

2.° Se pel polo dell' ecclittica, e pel medesimo astro si conduce un circolo massimo della sfera, esso chiamasi *circolo di latitudine*, e riesce perpendicolare all' ecclittica. L' arco dell' ecclittica compreso fra l' equinozio di primavera ed il circolo di latitudine chiamasi *longitudine dell' astro*, che come l' ascensione retta, contasi da 0° fino a 360° dall' occidente verso l' oriente. Chiamasi poi *latitudine* la distanza dell' astro dall' ecclittica valutata nel poco fa menzionato circolo di latitudine, e questa dicesi *boreale* o *positiva* se l' astro è nell' emisfero boreale; *australe* o *negativa* se trovasi nell' emisfero australe.

3.° Finalmente immaginiamo che per lo zenit e l'astro sia condotto un circolo massimo, il quale riuscendo perpendicolare all'orizzonte vien detto *verticale*. L'arco di circolo massimo compreso in questo verticale fra l'astro e l'orizzonte chiamasi *altezza dell'astro*. L'arco d'orizzonte compreso fra il piede del verticale ed il meridiano partendo dal sud viene dagli astronomi detto *azimut*.

11. Per illustrare quanto abbiamo detto con una figura, rappresenti primieramente C il luogo dell'osservatore, il quale si crede sempre situato al centro dell' apparente volta celeste. (*Fig.* 6) Sia OAR l'orizzonte, cosicchè per l'osservatore posto in C è soltanto visibile tutto ciò che è al di sopra OR, ed invisibile quello che è al di sotto. Di questo circolo la figura ne presenta soltanto la metà, l'altra metà essendo supposta di dietro. Sia Z il zenit o polo dell' orizzonte. Rappresenti EQ l'equatore, vale a dire quel circolo massimo della sfera celeste, paralellamente a cui essa sembra ravvolgersi da oriente in occidente entro lo spazio di 24 ore; P il polo dell' equatore elevato sopra il nostro orizzonte, che per noi è il polo boreale. Se per P e per Z noi c' immaginiamo condotto un circolo massimo della sfera, sarà questo al tempo stesso perpendicolare all' equatore ed all' orizzonte, e rappresenterà il meridiano. Se eq, $e'q'$ rappresentano due circoli minori della sfera celeste, i piani de' quali siano paralelli all' equatore celeste, saranno essi tagliati dal meridiano ad angolo retto. Supponiamo che l' orizzonte tagli l' equatore, ed i paralelli in A, a, a'. Saranno evidentemente gli archi AQ, aq, $a'q'$ precisamente uguali alle distanze dei punti Q, q, q' all' orizzonte dall' altra parte, ed in conseguenza se c'immaginiamo tre stelle che percorrano i tre circoli EAQ, eaq, $e'a'q'$, queste arrivate ai punti Q, q, q' saranno alla metà della durata della loro apparizione visibile sopra l' orizzonte, e quindi tanto tempo impiegherà un astro qualunque a pervenire dall' orizzonte al meridiano, quanto ne impiega dal meridiano a tornare all' orizzonte. Per questa ragione l' arco di un paralello intercetto fra l' orizzonte ed il meridiano chiamasi *arco semidiurno*.

Essendo Z il zenit dell' orizzonte OR, ed EQ l' equatore, sarà ZQ la latitudine di quell' osservatore, che è posto in C, ed apparisce essere $ZQ = PR$ per essere tanto PQ quanto ZR uguali a 90°. Quindi la latitudine è sempre uguale all' altezza del polo.

12. Supponiamo ora, che un astro in virtù del suo moto diurno percorra il suo paralello aq uniformemente, in modo che in 24 ore essendo partito da q siavi pur ritornato. Per il polo P si conduca un arco Pa, il quale passi per l' astro, e l' accompagni in tutto il suo moto diurno. Essendo tutti i punti del paralello ugualmente distanti dal polo P, gli archi tutti Pa, Pb, Pc, Pq saranno fra loro uguali. Quindi se l' astro percorre in tempi uguali gli archi uguali ab, bc, cq saran-

no gli angoli aPb, bPc, cPq fra loro uguali. Posto ciò, supponiamo l'astro nascente in a. Siccome, per ipotesi, in 24 ore percorre uniformemente i 360° del suo paralello, così in un'ora ne percorrerà 15°. Se pertanto in un'ora da a si sarà trasportato in b, sarà l'angolo aPb di 15°, e l'angolo aPq diminuirà in un'ora di 15°, in due ore del pari diminuirà di 30°, e così di seguito. Risulta di qui, che gli angoli compresi al polo dell'equatore fra il meridiano ed un circolo che accompagna l'astro nel suo moto diurno variano proporzionalmente al tempo in ragione di 15 gradi per ora, e per questa ragione sono detti *angoli orarii*. Si fissa l'origine degli angoli orarii nel meridiano, ai quali si attribuisce il segno + nell'emisfero occidentale dopo il passaggio degli astri per questo circolo, ed il segno — avanti il passaggio nell'emisfero orientale. Risulta ancora, che se è dato l'angolo aPq al polo compreso fra il meridiano e l'astro nascente, si avrà il tempo che l'astro impiega a giungere dall'orizzonte al meridiano, convertendo questo angolo in tempo a ragione di 15° per ora, ossia di quattro minuti di tempo per ogni grado. Viceversa, se rapporto ad un determinato astro sarà dato il tempo della sua mezza apparizione diurna, si avrà l'angolo aPq riducendo il dato tempo in gradi a ragione di 15° per ogni ora.

13. Sia di nuovo OR l'orizzonte, Z lo zenit, EQ l'equatore, P il suo polo, sarà PZO il meridiano. (*Fig.* 7) $♈K$ rappresenti l'ecclittica inclinata all'equatore di 23° 28', E' sia il suo polo, ed ♈ l'equinozio di primavera. Finalmente sia S un astro qualunque nel cielo stellato.

1.° Per P e per S condotto un arco di circolo massimo fino all'equatore, riuscirà a questo perpendicolare, e sarà $PA = 90°$. L'arco SA si chiama *declinazione dell'astro*, ed è questa boreale se l'astro cade fra l'equatore ed il polo P, australe se cade dall'altra parte dell'equatore; il circolo PSA chiamasi *circolo di declinazione*. La distanza $A♈$ del punto A dall'equinozio chiamasi *ascensione retta* dell'astro S, e questa si conta da zero fino a 360°. I due archi $A♈$, AS determinano completamente la posizione dell'astro S. Egli è ora evidente, che l'AR (si segna così l'ascensione retta di un astro) e la declinazione restano inalterate in virtù del moto diurno, perchè se l'astro S si allontana dal meridiano, anche l'equinozio ♈ d'altrettanto se ne allontana nello stesso tempo in virtù del moto diurno.

2.° Se per E' e per S si conduce un circolo massimo, sarà questo perpendicolare all'ecclittica, e si chiama *circolo di latitudine*. L'arco SL denotante la distanza dell'astro dall'ecclittica si chiama *latitudine dell'astro*, che è boreale o australe, secondo che l'astro trovasi nell'emisfero boreale o australe dell'ecclittica. L'arco di ecclittica $L♈$ denotante la distanza di L dall'equinozio si chiama *lon-*

gitudine dell' astro. Anche qui è evidente essere la longitudine e latitudine di un astro indipendente dal moto diurno, e restar la stessa a tutte le ore del giorno.

3.° Finalmente se per lo zenit Z, e per l'astro S si conduce un arco ZSH sarà questo il verticale dell'astro; SH sarà la sua altezza sopra l'orizzonte, ed OH distanza di H dal meridiano valutata nell'orizzonte si chiama *azimut dell' astro*. Egli è evidente, che l'altezza e l'azimut variano ad ogni istante per l'effetto del moto diurno. L'azimut OH è eziandio uguale all'angolo OZH formato al zenit fra il verticale ed il meridiano. L'angolo ZPS compreso fra il meridiano ed il circolo di declinazione chiamasi *angolo orario*.

CAPITOLO II.

*Dei mezzi, de' quali si deve far uso per determinare l'*AR*, e la declinazione degli astri; loro usi principali. Descrizione e verificazione delle Macchine Astronomiche.*

14. La prima cosa chè far deve un osservatore è di ben determinare la direzione del meridiano del luogo, ove si propone di stabilire le sue osservazioni. Il meridiano è un piano perpendicolare all'orizzonte, che passa per lo zenit, e per il polo dell'equatore. Quando adunque siasi riconosciuto il polo dell'equatore, basterà far passare per esso, e për il centro del nostro occhio un piano verticale, che sarà evidentemente il meridiano. Si riconosce la posizione del polo dall'osservare quelle stelle, che in virtù del moto diurno non cambiano di sito dentro lo spazio di 24 ore. Tutti conoscono la stella polare, la quale, quantunque non sia esattamente situata nel polo, può tuttavia servire a dare una direzione molto prossima al vero per una prima indagine della posizione del meridiano.

Il moto diurno del Sole ci somministra un altro mezzo più sicuro ed esatto per determinarne la posizione. In virtù del moto diurno, il Sole descrive tutti i giorni un circolo paralello all'equatore, ed è a tutti noto come la sua viva luce intercettata da un corpo opaco lasci dietro di esso un'ombra, che è d'ugual lunghezza quando la sua altezzá sopra l'orizzonte è la stessa. Di più, siccome il Sole si eleva sopra l'orizzonte fino ad acquistare la sua massima altezza sul meridiano, e dopo il suo passaggio per il meridiano, discende inversamente per gli stessi gradi, pei quali si era inalzato; egli avrà evidentemente la stessa distanza dal meridiano, quando in uno stesso giorno avrà la stessa altezza sopra l'orizzonte, ossia quando le ombre di uno, stesso

oggetto di qua e di là dal meridiano hanno la medesima lunghezza. Ciò posto, facilmente si comprenderà la ragione del seguente metodo per descrivere la linea meridiana in un dato luogo.

(*Fig.* 8) In un piano orizzontale descrivasi un circolo, e nel suo centro s'innalzi uno stilo verticale, e tale che la sua ombra possa entrare dentro del circolo verso 9^h della mattina.

Si osservi alla mattina avanti mezzogiorno il punto B verso l'occidente, in cui l'ombra dello stilo entra nel circolo, e si noti questo punto con diligenza. Dopo mezzogiorno l'ombra dello stilo rivolgendosi verso levante si allunga a proporzione, che il Sole discende. Si noti il punto A, in cui torna a tagliare il circolo. Si divida l'arco BA per metà in P, e la linea $MCPN$ rappresenterà la direzione della meridiana. Il piano verticale eretto sopra questa linea sarà il meridiano stesso.

15. Noi supporremo per ora l'osservatore provveduto di un esattissimo orologio a minuti secondi, di un quadrante diviso in gradi, minuti e secondi, e di uno *stromento dei passaggi*.

L'orologio è una macchina composta di un roteggio, il quale fa muovere tre indici, uno dei quali segna le ore, l'altro i minuti, il terzo i secondi di tempo. Il moto del roteggio è moderato da un pendolo, dalla lunghezza del quale dipende la durata di ciascheduna oscillazione. Scorciando il pendolo, ogni oscillazione si compie in un tempo più breve; allungandolo, si allunga eziandio la durata dell'oscillazione. Noi supporremo il pendolo ridotto ad una tale lunghezza, che una stella fissa impieghi esattissimamente $24^h\ 0'\ 0''$ a partire dal meridiano, e ritornarvi, ossia noi supporremo, che nel tempo, in cui si compie la rivoluzione diurna delle stelle fisse, il pendolo faccia precisamente 86400 oscillazioni, tanti appunto essendo i minuti secondi contenuti in 24 ore. Un tal orologio sarà da noi detto *orologio astronomico*.

Il quadrante è un quarto di circolo, la cui circonferenza è divisa esattamente in gradi, minuti e secondi. È munito di un cannocchiale girevole intorno al suo centro ad oggetto di poter vedere anche i più piccoli astri, e serve a determinare la loro elevazione sopra l'orizzonte, o la loro distanza dal zenit. Per ordinario si applica ad un solidissimo muro eretto sulla direzione del meridiano, serve a misurare la distanza dal zenit degli astri, mentre passano pel meridiano stesso, ed allora prende il nome di *quadrante murale*. Se poi si può dirigere a qualunque parte del cielo, prende il nome di *quadrante mobile*.

(*Fig.* 9) Per comprendere l'uso del quadrante murale, sia $ZONR$ la circonferenza del meridiano celeste situata ad una distanza infinitamente grande da noi. Concentrico a questo s'immagini un circolo di dimensioni finite, come di 6 o 8 piedi di raggio, e sia esso rappre-

sentato in $zonr$. Rappresenti OR la sezione dell'orizzonte col meridiano, e sia ZAN la linea che dal zenit va al nadir. Posto ciò, arrivi un astro al meridiano in S, e mandi un raggio di luce al centro del circolo in A, il quale si prolunghi in s. È manifesto essere SO l'altezza meridiana dell'astro sopra l'orizzonte, ed SZ, suo complemento, ne rappresenta la distanza dal zenit. Ora sr ed sn sono evidentemente due archi simili ad SO, SZ; ossia comprendono lo stesso numero di gradi, minuti e secondi. Se adunque misureremo sn, avremo la distanza dell'astro dal zenit; se misureremo sr, avremo invece la sua altezza sopra l'orizzonte.

Il quarto di circolo nsr è nella macchina in questione di ottone, e tenuto insieme da'raggi nA, Ar pure di ottone. La linea As è un cannocchiale girevole intorno al centro A; si può fermare in qualunque punto del quarto di cerchio, ed è destinato a ricevere il raggio di luce proveniente dall'astro S. Dei fili sottilissimi di ragno o di seta tesi nel foco del cannocchiale indicano la direzione dell'asse ottico del medesimo, e quando l'immagine dell'astro si fa coincidere coll'intersezione di questi fili, allora il raggio di luce proveniente dall'astro si confonde con l'asse ottico del cannocchiale, il quale in questa posizione fermato dà la distanza sn o SZ dell'astro dal zenit mediante le divisioni scolpite sulla macchina.

Per ultimo lo stromento dei passaggi è un cannocchiale sostenuto da un asse, che si può rendere orizzontale mediante un livello a bolla d'aria. L'asse ottico del cannocchiale è perpendicolare all'asse orizzontale della macchina; così avendo diretto quest'ultimo nella vera linea di levante a ponente, l'asse ottico descrive la superficie del meridiano. L'asse del cannocchiale è indicato dall'intersezione di due fili sottilissimi tesi ad angolo retto nel foco dell'obbiettivo. Quando un astro corrisponde a questa intersezione, trovasi allora nel meridiano. Questa macchina è destinata ad osservare con precisione il momento, in cui un astro qualunque passa al meridiano in virtù del suo moto diurno, e perciò è necessario, che l'orologio astronomico, di cui abbiamo fatto menzione, gli sia collocato abbastanza vicino, affinchè l'osservatore possa notarne le oscillazioni.

Provveduto l'osservatore di questi stromenti (de'quali daremo in fine di questo capitolo una più ampia descrizione), passiamo a vedere come possa formare un catalogo di stelle, determinando la loro posizione col mezzo dell'ascensione retta, e declinazione.

Problema I. Determinare la latitudine geografica dell'osservatore, ossia la distanza del suo zenit dall'equatore.

16. (*Fig.* 10) Sia HZR il meridiano, O il luogo dell'osservatore, Z il suo zenit, P il polo dell'equatore, HOR l'orizzonte, OQ l'equatore, o piuttosto la sezione dell'equatore col meridiano, ab la sezione

di un paralello all' equatore descritto da un astro che non tramonti giammai. Quando questo astro passa al meridiano in a, si osservi la sua altezza meridiana aR, e 12 ore dopo, essendo dal suo moto diurno ricondotto al meridiano sotto il polo P in b, si osservi pure la sua altezza Rb. A motivo di $Pa = Pb$ è chiaro essere l'altezza PR del polo $= \frac{1}{2}(Ra + Rb)$; cioè *si avrà la latitudine di un dato luogo osservando l'altezza meridiana di una stella che non tramonti giammai, tanto nel suo passaggio superiore, che nel suo passaggio inferiore, e prendendo la semisomma di queste due altezze.*

Esempio. Dietro molte osservazioni ho trovato la massima altezza

della polare nel suo passaggio superiore	$= 47° \ 4' \ 45'', 3$
La minima altezza nel suo passaggio inferiore . .	$= 43 \ 43 \ 20, 7$
Semisomma, ossia latitudine	$= 45 \ 24 \ 3, 0$
Parimente, massima altezza di β orsa minore . .	$= 60° \ 29' \ 23'', 7$
Sua minima altezza nel passaggio inferiore . . .	$= 30 \ 18 \ 43, 2$
Latitudine	$= 45 \ 24 \ 3, 4$

donde apparisce potersi stabilire la latitudine dell' Osservatorio di Padova $= 45° \ 24' \ 3'', 2$, che è il medio dei due precedenti risultamenti. Dietro un gran numero di osservazioni da me riferite nel primo volume dei nuovi Atti dell' Accademia di Padova trovo la latitudine $= 45° \ 24' \ 2'', 50$.

Problema II. Determinare la declinazione d'un astro, ossia la sua distanza dall' equatore.

17. (*Fig.* 10) Sia HZR il meridiano, P il polo, Z il zenit, OQ l'equatore, S l'astro di cui si domanda la declinazione. Col quadrante murale si osservi la sua distanza dal zenit ZS. La declinazione SQ sarà = latit. ZQ — dist. oss. ZS. Se questo resto è positivo la declinazione è boreale, e se è negativo, come per un astro situato in S'', la declinazione è australe.

Se poi l'astro fosse fra il zenit ed il polo, come in S', la sua declinazione $S'Q$ è = latit. + dist. osserv. ZS'; e quando questa somma supera 90°, come accaderebbe per un astro nel suo passaggio inferiore, allora la declinazione è il supplemento di questa somma.

*Problema III. Esporre il modo di osservare l'*AR *degli astri coll' ajuto dell' orologio astronomico, e dello stromento dei passaggi.*

18. (*Fig.* 11) Rappresenti MN la direzione del meridiano, a cui si vanno successivamente presentando in virtù del moto diurno tutti i punti dell' equatore e dei suoi paralelli. Sia l'equinozio in ♈. Allorquando il punto ♈ dell' equatore trovasi sul meridiano, supponiamo, che l'orologio mettasi in moto, essendo stati i suoi indici collocati in $0^h \ 0' \ 0''$. Ravvolgendosi la sfera celeste in modo da terminare la sua rivoluzione in 24 ore, tutte le volte che l'orologio segnerà $0^h \ 0' \ 0''$,

l'equinozio ♈ sarà ritornato al meridiano. Siccome poi il moto diurno della sfera celeste è uniforme, così in un'ora il punto ♈ dell'equatore si slontanerà dal meridiano della 24.ª parte di 360°, ossia quando l'orologio segnerà $1^h\ 0'\ 0''$, passeranno pel meridiano tutte quelle stelle, che hanno 15° di *AR*; a $2^h\ 0'\ 0''$ vi passeranno quelle che hanno 30° d'*AR*, e così di seguito. Laonde *il tempo dell'orologio convertito in gradi a ragione di* 15° *per ora darà l'* AR *di quelle stelle, che trovansi sul meridiano*. Così se, a cagion d'esempio, una stella passa pel meridiano, mentre l'orologio segna $5^h\ 2'\ 25''$, l'*AR* di quella stella sarà $= 75°\ 36'\ 15''$.

Scolio I. Tutta la difficoltà consiste a regolare l'orologio in modo che segni $0^h\ 0'\ 0''$ allorquando l'equinozio di primavera passa pel meridiano, lo che suppone esattamente conosciuto quel punto particolare dell'equatore, a cui corrisponde l'equinozio. Ora essendo l'equinozio l'intersezione dell'eclittica con l'equatore, ben si comprende non potersi questo esattamente conoscere, se più da vicino non si esamini la teoria del Sole. Sarebbe tolta questa difficoltà se si conoscesse l'*AR* particolare di una sola stella, poichè per regolare l'orologio altro non dovrebbe farsi che convertire questa *AR* in tempo; porre gl'indici dell'orologio nell'ora così ritrovata, e metterlo in moto quando questa stella venisse a passare pel meridiano. In allora saremo sicuri che egli segnerà $0^h\ 0'\ 0''$ allorquando vi passerà l'equinozio. Ma anche per conoscere l'*AR* di questa stella convien ricorrere a dei confronti stabiliti colla teoria del Sole; perciò noi per ora supporremo, che questa *AR* sia già stata determinata, e ad essa siano state tutte le altre riferite. In tal guisa comprenderemo come gli astronomi abbiano potuto formare un catalogo di stelle, ove registrate si trovino le loro *AR*, e le loro declinazioni.

Scolio II. Confrontando fra loro i due successivi passaggi di una medesima stella pel meridiano, comprenderemo facilmente se l'orologio sia ben regolato, o no; giacchè se la differenza di questi passaggi è di 24 ore precise, è un indizio essere egli ben regolato; diversamente si allungherà o si accorcerà il pendolo finchè l'osservata differenza sia di $24^h\ 0'\ 0''$, oppure si terrà conto del suo acceleramento o ritardo diurno.

Usi delle declinazioni, ed ascensioni rètte delle stelle fisse.

19. Una volta determinate le ascensioni rette, e declinazioni delle stelle fisse, potranno applicarsi a diversi importantissimi usi astronomici e geografici. Lasciando per ora da parte il sommo vantaggio, che dalle stelle fisse ritraggono gli astronomi nel riportare ad esse la posizione dei pianeti, delle comete, e di tutti gli astri che hanno un moto

proprio indipendente dal moto diurno ci limiteremo ai seguenti usi:

1.° Le AR ci presentano l'ordine, in cui nell'orologio astronomico si succedono le stelle nel loro passaggio pel meridiano. Di fatti le AR ridotte in tempo a ragione di 15° per ora danno il passaggio dei corrispondenti astri al meridiano, ed il loro confronto c'indica l'ordine con cui si succedono.

2.° Le declinazioni c'indicano in qual distanza dal zenit passar devono gli astri nel meridiano, data la latitudine, e viceversa servono a determinare la latitudine, quando siasi osservata la distanza meridiana dal zenit. Di fatti chiamata δ la declinazione di un astro (che suppongo boreale), L la latitudine geografica dell'osservatore, Z la distanza meridiana dal zenit, si avrà $Z = L - \delta$, e quindi $L = Z + \delta$. Se la declinazione sarà australe, dovrà δ considerarsi come negativo.

3.° Le AR e declinazioni insieme somministrano il modo di trovare nell'orologio astronomico l'ora in cui nasce o tramonta un dato astro, allorquando si conosca la latitudine dell'osservatore. (*Fig.* 12) Sia di fatti HR l'orizzonte, Z il zenit, EQ l'equatore, P il suo polo, ed eq sia un paralello all'equatore percorso da un astro, la cui declinazione sia δ; allorquando l'astro in virtù del suo moto diurno perviene al punto e, sorge sopra l'orizzonte, se è dalla parte d'oriente, ovvero tramonta, se è dalla parte d'occidente. Il tempo impiegato dall'astro fino al meridiano è (come abbiamo già dimostrato) espresso dall'angolo ePQ ridotto in tempo a ragione di 15 gradi per 1^h. Tutto adunque si riduce alla ricerca di questo angolo. Ora nel triangolo ZPe abbiamo $ZP = 90° -$ latit. $ZQ = 90° - L$; $Pe = Pq = PQ - Qq = 90° -$ decl. dell'astro $= 90° - \delta$, $Ze = 90°$. Quindi dalla Trigonometria avremo

$$\cos P = \frac{\cos Ze - \cos ZP \cos Pe}{\operatorname{sen} ZP \operatorname{sen} Pe} = - \operatorname{tang} L \operatorname{tang} \delta .$$

Trovato col mezzo di questa formula l'angolo P, e ridotto in tempo, se si sottrae dal tempo del suo passaggio pel meridiano, si avrà il momento, in cui l'astro nasce, e se si aggiunge, si ha il tempo in cui tramonta.

Scolio. È inutile rammentare, che le declinazioni boreali devono essere riguardate come positive, e le australi come negative.

Coroll. I. Se $\delta = 0$, ossia se l'astro si trova nell'equatore, in allora avremo $\cos P = 0$, e quindi $P = 90°$. Perciò in questo caso il tempo impiegato a pervenire dall'orizzonte al meridiano sarà di 6 ore, e l'arco diurno di 12 ore, qualunque d'altronde sia la latitudine L. Si vede di qui che tutti i paesi della terra hanno i giorni uguali alle notti, quando il Sole si trova nell'equatore, lo che accade verso il 21 di Marzo, e verso il 22 di Settembre. Lo stesso accade se $L = 0$,

qualunque sia δ; vale a dire, che tutti gli astri stanno sopra l'orizzonte 12^h per tutti i paesi situati sotto l'equatore, e perciò quelli osservatori avranno sempre i giorni uguali alle notti.

Coroll. II. Se δ è positivo, ossia se l'astro è situato nell'emisfero boreale (considerando L positivo) sarà $\cos P$ una quantità negativa, e perciò $P > 90° > 6^h$. Dunque tutti gli astri situati al di sopra dell'equatore impiegano più di 12 ore a percorrere la porzione di paralello compresa al di sopra dell'orizzonte. Apparisce di qui la ragione, per cui fra il 21 di Marzo ed il 21 di Settembre trovandosi il Sole nell'emisfero boreale, sono i giorni più lunghi delle notti.

Coroll. III. Se δ è negativo, cioè se l'astro è australe, sarà $\cos P$ positivo, e perciò $P < 90° < 6^h$, onde l'apparizione diurna per le stelle australi sarà minore di 12 ore; e per questa ragione nei mesi d'inverno fra il 22 di Settembre ed il 21 del seguente Marzo trovandosi il Sole nell'emisfero australe, i giorni sono minori delle notti.

Scolio. Affinchè l'astro nasca o tramonti sopra un particolare orizzonte, conviene che (fatta astrazione dai segni) sia sempre $\cos P < 1$, e quindi $\tang L . \tang \delta < 1$ e $\tang L < \cot \delta$, ovvero $L < 90° - \delta$. Se sarà $L = 90° - \delta$ tutto il paralello, è situato al di sopra dell'orizzonte, e lo toccherà nel suo punto più basso. Se $L > 90° - \delta$ l'astro non tramonta giammai, essendo il suo paralello tutto compreso sopra il nostro orizzonte. Tali sarebbero per noi gli astri, che hanno una declinazione maggiore di 44° 36'. Quelli poi che hanno una declinazione australe maggiore di 44° 36' non sorgono giammai sopra il nostro orizzonte. È facile render ragione di tutte queste apparenze con apposite figure, o col mezzo di un globo.

20. Servono ancora le AR e le declinazioni degli astri a determinare la loro posizione rapporto all'orizzonte ad ogni dato istante di tempo nell'orologio astronomico; vale a dire servono a determinarne l'altezza e l'azimut ad ogni momento.

(*Fig.* 13) Sia ad un qualunque istante l'astro in S. Condotto per lo zenit Z il verticale ZS, pongasi $SH =$ altezza dell'astro $= h$; l'angolo $PZH = Z$, e sarà esso il supplemento dell'azimut OH. Si chiamino, come sopra, L la latitudine ZQ, δ la declinazione Qq dell'astro, e l'angolo orario SPZ pongasi $= P$. Avremo

$$\cos P = \frac{\cos ZS - \cos ZP \cos PS}{\operatorname{sen} ZP \operatorname{sen} PS} = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta}{\cos L \cos \delta};$$

donde ricaveremo $\operatorname{sen} h = \cos L \cos \delta \cos P + \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta$. Ottenuto da questa equazione il valore di h, si avrà l'angolo Z col mezzo della formula $\operatorname{sen} Z = \frac{\cos \delta \operatorname{sen} P}{\cos h}$. Le quantità h, Z si possono eziandio facilmente ottenere dai precetti esposti nella trigonometria (§ XV.

caso III.) per la risoluzione del triangolo PZS, in cui si conoscono due lati PZ, PS con l'angolo da essi compreso. Le formule ivi riferite riescono comodissime al calcolo logaritmico, ed applicate alle presenti denominazioni divengono

$$(A)\begin{cases}(1)\ \tang\varphi=\cot\delta\cos P;\\(2)\ \tang Z=\dfrac{\tang P\,\sen\varphi}{\cos(L+\varphi)};\quad(3)\ \tang h=\cos Z\tang(L+\varphi).\end{cases}$$

Può talvolta accadere che si desideri di conoscere l'altezza dell'astro, l'angolo Z, e l'angolo S formato dal verticale, e dal circolo di declinazione, al quale si dà il nome di *angolo paralattico*. In tal caso le formule di Gauss esposte di sopra (Trig. XII) somministreranno la seguente comodissima soluzione, ove per h' intendiamo la distanza di S dal zenit, ossia il complemento di h.

$$(B)\begin{cases}(1)\ \sen\tfrac{1}{2}(Z-S)\sen\tfrac{1}{2}h'=\cos\tfrac{1}{2}P\sen\tfrac{1}{2}(L-\delta)\\(2)\ \cos\tfrac{1}{2}(Z-S)\sen\tfrac{1}{2}h'=\sen\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}(L+\delta)\\(3)\ \sen\tfrac{1}{2}(Z+S)\cos\tfrac{1}{2}h'=\cos\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}(L-\delta)\\(4)\ \cos\tfrac{1}{2}(Z+S)\cos\tfrac{1}{2}h'=\sen\tfrac{1}{2}P\sen\tfrac{1}{2}(L+\delta)\end{cases}$$

dalle quali con somma facilità si ricavano i valori di Z, S, h'.

21. Un altro uso importantissimo delle ascensioni rette, e declinazioni delle stelle si è di determinare con molta precisione la correzione da farsi al tempo segnato da un orologio astronomico, qualora siasi notato in esso il tempo, in cui una data stella giunge ad una determinata altezza. In fatti nel triangolo PZS conosciuti i tre lati, si avrà l'angolo orario P colla formula sopra riferita $\cos P=\dfrac{\sen h-\sen L\sen\delta}{\cos L\cos\delta}$, e se le lettere h', L', δ' esprimono i complementi di h, L, δ la formula precedente somministrerà le seguenti

$$(1)\ \cos P=\frac{\cos h'-\cos L'\cos\delta'}{\sen L'\sen\delta'};$$

$$(2)\ \sen\tfrac{1}{2}P=\sqrt{\frac{\sen(p-L')\sen(p-\delta')}{\sen L'\sen\delta'}};\quad(3)\ \cos\tfrac{1}{2}P=\sqrt{\frac{\sen p\sen(p-h')}{\sen L'\sen\delta'}};$$

ove $p=\tfrac{1}{2}(h'+L'+\delta')$. Le ultime due formule sono comodissime pel calcolo logaritmico.

Trovato l'angolo P si riduca in tempo, e se l'astro non è ancora arrivato al meridiano, si tolga dalla sua AR, e si aggiunga se è passato il meridiano; si otterrà il vero tempo astronomico, che confrontato con quello notato dall'orologio darà l'errore del medesimo. Veniamo agli esempj.

Esempio I. Posta la latitudine dell'Osservatorio di Padova 45° 24′ 3″, si domanda l'ora in cui all'orologio astronomico sorgeranno sopra l'o-

rizzonte Arturo e Spica della Vergine, ponendo che le loro AR e declinazioni siano le seguenti:

Arturo AR . . $211° 38' 7''$, (in tempo $= 14^h 6' 32'',5$); decl. $= +20° 13' 48''$
Spica della Verg. $198\ 40\ 6$ . . . . $= 13\ 14\ 40,4$ . . $= -10\ \ 6\ 44$

Chiamato P l'arco semidiurno, si ha $\cos P = -\tan L \tan \delta$ (§ 19). Dispongo perciò il calcolo come segue

Per Arturo	Per la Spica
$\log - \tan L = 0,00607 -$	$\log - \tan L = 0,00607 -$
$\log \tan \delta = 9,56646 +$	$\log \tan \delta = 9,25127 -$
$\log \cos P = 9,57253 -$	$\log \cos P = 9,25734 +$
$P = 111° 56' 40''$	$P = 79° 34' 49''$
in tempo $P = 7^h 27' 46'',7$	$P = 5^h 18' 19'',3$
AR data $= 14\ \ 6\ 32,5$	AR data $= 13\ 14\ 40,4$
Arturo nasce a $= 6\ 38\ 45,8$	la Spica nasce a $= 7\ 56\ 21,1$
tramont. $= 21\ 34\ 19,2$	tramont. $= 18\ 32\ 59,7$

Esempio II. Si domanda l'altezza e l'azimut di Arturo, quando egli è distante dal meridiano di $2^h 35'$, ossia quando $P = 2^h 35' 0'' = 38° 45' 0''$.

Si avrà in questo caso

$$L = 45° 24' 3''; \quad \delta = 20° 13' 48''; \quad P = 38° 45' 0''.$$

Quindi con le formule (A) del § precedente avremo

$l.\cot\delta = 0,4335355 +$	$\log \tan P = 9,9044910 +$	$\log \cos Z = 9,6316035 -$
$l.\cos P = 9,8920303 +$	$\log \operatorname{sen} \varphi = 9,9562354 +$	$l.\tan(L+\varphi) = 0,4363823 -$
$l.\tan\varphi = 0,3255658 +$	$c.l.\cos(L+\varphi) = 0,4636965 -$	$\log \tan h = 0,0679858 +$
	$\log \tan Z = 0,3244229 -$	

$$\begin{aligned} \varphi &= 64° 42' 27'',4 \\ L &= 45\ \ 24\ \ \ 3\ ,0 \\ \hline L+\varphi &= 110\ \ \ 6\ 30\ ,4 \end{aligned} \qquad Z = 115° 21' 2'',45; \quad h = 49° 27' 59'',13.$$

Che se si desiderano le quantità Z, h, S al tempo stesso, ci serviremo delle quattro superiori equaz. (B) ordinando il calcolo come segue

$$L = 45° 24' 3''; \quad \tfrac{1}{2}(L-\delta) = 12° 35' 7'',5; \quad \tfrac{1}{2}P = 19° 22' 30''$$
$$\delta = 20\ 13\ 48; \quad \tfrac{1}{2}(L+\delta) = 32\ 48\ 55,5$$

$\log \cos \tfrac{1}{2} P = 9,9746809$	$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} P = 9,5208103$
$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(L-\delta) = 9,3382469$	$\log \cos \tfrac{1}{2}(L+\delta) = 9,9244968$
$\log \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}h' \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(Z-S) = 9,3129278$	$\log \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}h' \cos\tfrac{1}{2}(Z-S) = 9,4453071$
$\log \cos \tfrac{1}{2} P = 9,9746809$	$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} P = 9,5208103$
$\log \cos \tfrac{1}{2}(L-\delta) = 9,9894375$	$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(L+\delta) = 9,7339466$
$\log \cos\tfrac{1}{2}h' \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(Z+S) = 9,9641184$	$\log \cos\tfrac{1}{2}h' \cos\tfrac{1}{2}(Z+S) = 9,2547569$

Le prime due equazioni danno $\log \tan \frac{1}{2}(Z - S) = 9{,}8676207$
e le due ultime . . . . . $\log \tan \frac{1}{2}(Z + S) = 0{,}7093615$
e però $\frac{1}{2}(Z - S) = 36^\circ\, 23'\, 59'', 52$; quindi $Z = 115^\circ\, 21'\, 2'', 45$
$\frac{1}{2}(Z + S) = 78\;\; 57\;\;\; 2\;, 93$ $\qquad S = 42\;\; 33\;\; 3\;, 41$
ottenuti $\frac{1}{2}(Z - S)$, $\frac{1}{2}(Z + S)$, le prime due equazioni danno $\log \text{sen} \frac{1}{2} h' = 9{,}5395678$, e le ultime due $\log \cos \frac{1}{2} h' = 9{,}9722444$, i quali si accordano a dare $\frac{1}{2} h' = 20^\circ\, 16'\, 0'', 44$ ed $h' = 40^\circ\, 32'\, 0'', 88$, il cui complemento darà la cercata altezza $h = 49^\circ\, 27'\, 59'', 12$ come sopra coll' altre formule.

Esempio III. La sera del giorno 11 Maggio 1819, un orologio regolato all' incirca sul tempo sidereo segnando $10^h\, 39'\, 55'', 5$, si osservò con un circolo moltiplicatore la distanza dal zenit di α Orione, la quale liberata dalle rifrazioni astronomiche coi metodi, che saranno esposti nel secondo volume, era $= 73^\circ\, 4'\, 46'', 7$. Si domanda l' angolo orario, e l' errore dell' orologio.

Assumendo per il calcolo di questa osservazione la vera latitudine $45^\circ\, 24'\, 2'', 5$; e prendendo la posizione della stella del catalogo del celebre Piazzi, dopo avervi fatto tutte le riduzioni, che verranno in progresso esposte per avere la posizione apparente della medesima, troveremo *AR* app. $= 86^\circ\, 20'\, 30'', 0$; declinazione $= + 7^\circ\, 21'\, 56'', 2$. Quindi per calcolare la formula (2), avremo

$L' = 44^\circ\, 35'\, 57'', 5$; quindi	$p = 100^\circ\;\; 9'\, 24'', 0$,	$\text{l.sen}(p - \delta') = 9{,}4786770$
$\delta' = 82\;\; 38\;\;\; 3\;, 8$	$p - L' = 55\;\; 33\;\; 26\;, 5$,	$\text{l.sen}(p - L') = 9{,}9162922$
$h' = 73\;\;\; 4\;\, 46\;, 7$	$p - \delta' = 17\;\; 31\;\; 20\;, 2$,	$\text{c. l. sen}\, \delta' = 0{,}0035985$
		$\text{c. l. sen}\, L' = 0{,}1535735$
		$\text{l. sen}^2 \frac{1}{2} P = 19{,}5521412$

Si forma di qui $\log \text{sen} \frac{1}{2} P = 9{,}7760706$, donde deducesi $P = 73^\circ\, 19'\, 46'', 5$; ottenuto l' angolo P, perchè la stella ha già passato il meridiano, si sommi con la sua ascensione retta, e si avrà l'*AR* di quel punto dell' equatore, che passava pel meridiano al tempo dell' osservazione, la quale risulta così $= 159^\circ\, 40'\, 16'', 5$. Questa ridotta in tempo dà il

vero tempo sidereo	$= 10^h\, 38'\, 41'', 10$
l' orologio segnava	$= 10\;\; 39\;\; 55\;, 50$
quindi errore del pendolo . . .	$= \qquad\;\; 1\;\; 14\;, 40$

della quale quantità egli avanzava realmente secondo le osservazioni di altre stelle allo stromento dei passaggi.

Descrizione delle principali Macchine Astronomiche; loro uso e verificazione.

22. Abbiamo superiormente indicato i fondamenti geometrici ai quali si appoggia la costruzione delle macchine, coll' ajuto delle quali

osservano gli astronomi le declinazioni e le ascensioni rette degli astri. Affinchè possa la studiosa gioventù acquistare delle medesime una più giusta idea daremo qui una succinta descrizione di quelle che corredano l'Osservatorio di Padova, le quali sono anche le più comuni ed utili nell'esercizio pratico dell'Astronomia, rimandando per tutte le altre ad opere più voluminose, e soprattutto alle numerose collezioni di osservazioni pubblicate dalla attività degli Astronomi, nelle prefazioni delle quali si dà d'ordinario un'ampia descrizione delle macchine con cui furono esse intraprese.

I. *Quadrante murale. Tav. II. Fig. I.* (*)

La *fig. I.* rappresenta il quadrante murale, il cui raggio è di 8 piedi inglesi, opera perfettissima del celebre artefice Ramsden. *MNPQ* è una zona circolare di ottone di pol. 4 di larghezza congiunta ad un sistema di raggi e di corde tutti dello stesso metallo, come nella figura viene indicato. In essa dal centro *C* sono descritti due archi di circolo, dei quali l'interno è diviso con tutta precisione di 5 in 5 minuti secondo la divisione sessagesimale del circolo; nell'esterno l'angolo retto è diviso in 96 parti, ed ogn'una in 16 parti più piccole; ambedue le divisioni avendo l'origine comune nel raggio verticale.

AB è il cannocchiale girevole intorno al centro *C*, in modo che si possa condurre in ogni punto della periferia del quadrante. A diminuire l'attrito sono sottoposte al sostegno del cannocchiale due piccole carrucole *m*, *m*, le quali scorrono sopra il lembo del quadrante seco trasportando il tubo *AB*; *a* è un pezzo di ottone (il quale sostiene il micrometro *pq*) che abbraccia il lembo del quadrante; può scorrere lungo il medesimo, e con una forte vite di pressione situata dietro il lembo si può fermare in un luogo qualunque per rendere stabile la posizione del cannocchiale. Il micrometro *pq* è congiunto al quadrante mediante due bracci di ottone che fanno angolo retto col suo piano, e lo trasportano al di dietro in una situazione allo stesso paralella, affinchè possa l'occhio dell'osservatore appressarsi all'oculare. Di questi bracci uno è congiunto al pezzo *a*; l'altro al cannocchiale e porta la madrevite, nella quale ingrana la vite micrometrica *pq*. Così girando la vite, muovesi anco per i minori intervalli il cannocchiale; il passo della vite corrisponde a 52″ sessagesimali; l'artefice ha diviso la circonferenza del circoletto *r* del micrometro in 52 parti, ciascheduna delle quali corrisponde in conseguenza ad 1″. Un'armatura di ottone *c*, *c*, *c*, *c* molto giudiziosamente costrutta dall'artefice impedisce la flessione del cannocchiale. Fra l'obbiettivo ed il centro per di dietro è infissa nel tubo una leva angolare caricata

(*) Essendo questa Tavola aggiunta alla presente edizione, abbiamo apposto i numeri romani alle figure per non alterare la numerazione delle antiche in numeri arabici.

di un forte peso all'estremità, il quale tiene tutto il sistema del cannocchiale in equilibrio intorno al centro per non gravare il micrometro, e rendere più agevoli i piccoli movimenti col suo mezzo procurati. *L* è una lanterna destinata ad illuminare in tempo di notte l'interno campo del cannocchiale, affinchè si possano vedere i sottili fili, ai quali riferiscesi la posizione degli astri; *o* un piccolo specchietto di avorio che riflette la luce nell'interno del tubo, il quale mediante il filo *gg* avvolgesi, e presentasi sotto varie inclinazioni alla fiamma della lucerna, stando all'oculare, ad oggetto di moderare l'intensità della luce riflessa secondo la debolezza degli astri che si vogliono osservare. Il cannocchiale scorrendo lungo il lembo *MNPQ* trasporta seco un piccolo arco *n* concentrico al quadrante in cui è scolpito il *nonio* tanto per la divisione interna, quanto per la divisione esterna, ufficio del quale è di suddividere le divisioni scolpite nel piano del quadrante per potere assegnare i più piccoli archi, come a parte esporremo in appresso.

Per ultimo nel foco comune dell'obbiettivo e dell'oculare sono tesi cinque sottilissimi fili equidistanti paralelli al piano del quadrante, ed uno ad esso perpendicolare; quando la macchina è al suo posto i primi riescono verticali, l'altro è orizzontale. L'intersezione del terzo filo verticale col filo orizzontale stabilisce l'asse ottico del cannocchiale, il quale deve riuscire paralello al piano del quadrante, affinchè essendo questo applicato al piano del meridiano, scorra egli pure in un piano ad esso paralello, che alla distanza infinita del firmamento confondesi col meridiano stesso. L'artefice ha regolato da bel principio i sostegni del cannocchiale in modo che questa condizione sia prossimamente adempita; per le piccole differenze ha lasciato al diaframma circolare che porta i fili la libertà di avvicinarlo od allontanarlo, e d'inclinarlo alcun poco mediante due viti che si avvolgono con una chiave apposita in direzione l'una all'altra perpendicolare, finchè il filo orizzontale riesca perpendicolare al piano della macchina, con che gli altri per costruzione gli riescono paralelli, e l'asse ottico risulti al medesimo piano paralello.

23. Vediamo ora, come si appoggi il quadrante al piano del meridiano, e come si verifichi per renderlo idoneo alle osservazioni. Costruito un solido muro, la cui facciata anteriore sia nel piano del meridiano precedentemente determinato dietro il metodo esposto al § 14, si applicheranno al medesimo due forti cunei di ferro, i quali quadrino negli incontri per di dietro praticati dall'artefice nei gruppi di ottone *X*, *Y*; ed un certo numero di sostegni convenientemente alti si disporranno in modo, che appoggino per di dietro sul lembo *MNPQ* affine di tenerlo registrato in un piano invariabile. Il cuneo *X* mediante una forte vite si può alzare ed abbassare per rendere verticale

esattamente il raggio che dal centro C viene al 0° della divisione; il cuneo Y si può per alcun poco muovere da levante verso ponente per far coincidere tutto il piano del quadrante col piano del meridiano.

A rendere verticale il raggio condotto per il principio della divisione, l'artefice ha scolpito due punti, l'uno nella lastra superiore di ottone AC, l'altro nel lembo inferiore MN del quadrante, i quali determinano una linea paralella al predetto raggio; un sottile filo di argento appeso ad un uncino, e teso da un piccolo peso Z in modo che passi per il punto superiore, se cuopre eziandio il punto inferiore, assicura che il nominato raggio è verticale, od almeno mantiene rapporto all'orizzonte una posizione fissa, se nella prima costruzione siavi un qualche difetto di paralellismo. Se il filo a piombo non cuopre eziandio il punto inferiore, si solleva, o si abbassa lentamente il cuneo X finchè ciò abbia luogo. Conviene inoltre aver riguardo, che il filo a piombo egualmente distacchisi dalla lastra superiore AC, e dal lembo MN, che costituiscono uno stesso piano, affinchè riesca verticale il piano del quadrante, e prolungato passi per il zenit. Se ciò non avesse luogo, si muoveranno gli appoggi situati dietro il lembo $MNPQ$, finchè tale condizione sia adempita quanto più esattamente si può.

Venendo alla verificazione del cannocchiale, conviene prima di tutto rendere orizzontale il filo teso attraverso al suo campo, lo che si riconosce tosto portandolo sopra una stella equatoriale, mentre passa pel meridiano. Se in tutto il tempo che impiega ad attraversare il campo stesso, non si distacca dal filo, sarà esso paralello all'equatore; in caso diverso vi si ridurrà volgendo lentamente tutto il diaframma del micrometro nel modo superiormente indicato. Ricondotto quindi il cannocchiale all'orizzonte, dirigasi verso un oggetto terrestre lontanissimo, nel quale sia stato precedentemente situato uno scopo meridiano coi precetti che esporremo qui appresso trattando del teodolite, e col mezzo del cuneo Y facciasi girare intorno alla verticale AZ il piano del quadrante, finchè l'intersezione del terzo filo col filo orizzontale determinante l'asse ottico dello stromento collimi allo scopo meridiano. Se l'asse ottico sia paralello al piano del quadrante, sarà allora questo così ricondotto nel piano del meridiano, lo che si verificherà colle osservazioni dei passaggi delle stelle in un modo analogo a quello, che esporremo per lo stromento dei passaggi. Una piccola deviazione di pochi secondi di tempo in più, od in meno sarà qui di nessuna conseguenza, perchè le altezze meridiane degli astri, all'osservazione delle quali questa macchina è principalmente destinata, non variano sensibilmente in vicinanza del meridiano.

24. Resta per ultimo a determinare l'errore della *linea di fiducia*. Se il raggio che passa pel zero del quadrante sia realmente verticale

e quello condotto pel zero del nonio sia esattamente paralello all' asse ottico del cannocchiale, allora rivolto questo ad una stella mentre passa pel meridiano, e condottala coll' ajuto del micrometro $p\,q$ in contatto del filo orizzontale, l' arco indicato dal zero del nonio darà evidentemente la vera distanza meridiana dell' astro dal zenit; ma se le indicate condizioni non hanno realmente luogo, allora la distanza dal zenit differirà dalla vera di una quantità, che rimarrà costante in tutta l' estensione del quadrante. Questa differenza di cui si devono correggere le distanze meridiane di tutte le stelle osservate collo stesso quadrante, chiamasi *errore della linea di fiducia* od anche *del principio di numerazione,* che devesi con ogni accuratezza determinare coi metodi che qui indichiamo.

25. *Metodo I.* Se abbiasi un circolo intero esattamente diviso, e meglio se sarà un circolo ripetitore, come quello che tosto descriveremo, si osservi con esso la distanza dallo zenit dello scopo meridiano, e di alcune principali stelle quando passano pel meridiano. Le stesse distanze si osservino col quadrante, ed il loro confronto darà l' errore costante di fiducia.

Se poi manchi il circolo ripetitore, converrà desumere dai più riputati cataloghi la declinazione delle principali stelle meglio determinate, e col mezzo della latitudine (che deve essere stata precedentemente osservata coi metodi esposti, o con quelli che esporremo nel capitolo seguente) calcolare la loro distanza vera dal zenit, che confrontata con quella osservata al quadrante darà l' errore cercato.

26. *Metodo II.* Si apparecchino in una stessa sala due muri paralelli al piano del meridiano con gli opportuni sostegni per ricevere e mantenere verticale il quadrante. Avendolo a bel principio applicato ad uno di essi, per esempio all' occidentale in modo che la sua faccia divisa guardi la plaga orientale, ed avendo ridotto il filo a piombo a corrispondere esattamente ai due punti superiormente indicati, s' intraprenda per alcune sere ad osservare la distanza dal zenit di quelle stelle che passano pel meridiano ad esso molto vicine, e col mezzo delle correzioni, che saranno in seguito indicate si riducano tutte queste osservazioni ad un' epoca fissa, prendendo delle distanze così ridotte di ciascuna stella il medio.

Si adatti in seguito il quadrante all' altro muro in modo che guardi la plaga occidentale, e riducasi il filo a piombo a corrispondere agli stessi punti. Si osservino di bel nuovo le stesse stelle zenitali, per le quali in questa posizione converrà trasportare il cannocchiale dalla parte opposta del principio di numerazione; si riducano le osservazioni alla stessa epoca, prendendo anche il medio delle distanze di ciascuna stella.

È palese, che se per una stella in particolare Z rappresenta la

distanza apparente osservata dal zenit nella prima posizione; Z' quella ottenuta nella seconda posizione, z la distanza vera, c l'errore di fiducia cercato, si avrà $z = \frac{1}{2}(Z + Z')$; $c = \frac{1}{2}(Z' - Z)$.

L'errore c dovrebbe risultare lo stesso dai confronti delle distanze di ciascheduna stella; i valori ritrovati oscilleranno in più ed in meno intorno ad un valore medio per gli errori inevitabili nelle osservazioni. Preso di tutti il medio aritmetico, si avrà l'errore probabile del principio di numerazione. Questo metodo è incomodo per i grandi quadranti murali, che non si possono muovere se non con molta difficoltà e dispendio, perciò raramente adoperato; ma è opportunissimo per i minori quadranti mobili del raggio di uno a due piedi applicati ad una colonna verticale girevole intorno a due perni, e per essi viene impiegato con sommo vantaggio.

27. *Metodo III.* I metodi precedenti hanno l'inconveniente di esigere il concorso di altre macchine, o della conoscenza della latitudine e della declinazione di alcune stelle, o di esigere lo spostamento sempre incomodo e pericoloso del quadrante dalla sua sede per fargli prendere una posizione inversa a quella nella quale ci proponghiamo per lo più di adoperarlo, e non presentano quindi il vantaggio di potere determinare in una maniera spedita ed indipendente l'errore di fiducia tutte le volte che possa occorrere. Il metodo seguente immaginato dal chiarissimo astronomo Bessel (*Effemeridi astronomiche di Berlino* 1812. *p.* 148.) va esente da questi difetti, e solo richiede che s'impieghino gli astri più luminosi, come il Sole e le stelle di prima od al più di seconda grandezza. Ecco in breve a che si riduce.

Rappresenti (*fig. II.*) O il centro del quadrante, intorno a cui è girevole il cannocchiale OC. $A'B'$ un piccolo specchietto piano solidamente congiunto in faccia all'obbiettivo col tubo del cannocchiale, sicchè seco lo trasporti incontrandone l'asse ottico sotto un angolo costante, che porremo $= a$. Tale specchietto deve avere dimensioni tali da cuoprire soltanto una porzione dell'obbiettivo, all'incirca la metà, sicchè rivolgendo direttamente ad una stella il cannocchiale, questa possa vedersi mediante i raggi che attraversano l'altra metà. Inoltre fingeremo il suo piano perpendicolare a quello del quadrante.

Posto ciò, sia S una stella di declinazione δ, la quale passi in una distanza vera dal zenit $= z$, e per vederla direttamente debbasi portare il cannocchiale nella direzione OC, dove fingeremo che corrisponda ad una divisione Z; se c sia l'errore di fiducia avremo

$$z - c = Z \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Lo specchietto situato in faccia all'obbiettivo riflette i raggi provenienti dall'astro, e da esso intercettati facendoli abbassare verso H di una quantità $= a$; ed è palese che se abbasseremo il cannocchiale in OD in modo che sia $COD = 2a$, si avrà dentro il campo l'im-

magine riflessa dell'astro, e la divisione a cui corrisponderà sarà

$$z - 2a - c = Z' \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Per ultimo si collochi in faccia all'obbiettivo un orizzonte artificiale ad olio od a mercurio simile a quello che descriveremo trattando nel secondo volume del *sestante a riflessione* nell'astronomia nautica. La superficie dell'orizzonte ripercoterà un'immagine dello stesso astro, la quale sarebbe distante dal zenit di $180° - z$; i raggi da essa provenienti ripercossi dallo specchio AB produrranno una nuova immagine, la quale sarà visibile nel centro del cannocchiale, se questo si fissi in una divisione . . . $180° - z - 2a - c = Z''$ . . . (3)

Se siansi osservate le distanze Z, Z', Z'' date dalle divisioni del quadrante, le equazioni (1), (2), (3) daranno le quantità z, a, c nel modo seguente

$$a = \tfrac{1}{2}(Z - Z');\ z = 90° - \tfrac{1}{2}(Z'' - Z');\ c = 90° - \tfrac{1}{2}(Z'' - Z) - Z.$$

L'angolo a rimane indeterminato; comodamente si può fare $= 22° 30'$, con che si possono impiegare a determinare l'errore di fiducia quelle stelle che hanno una distanza dal zenit superiore a 45°; con ciò le distanze Z', Z'' lette nel quadrante risultano equidistanti dalle sue divisioni estreme di $0° - 90°$.

28. Il metodo ora esposto nulla lascia a desiderare per parte della semplicità; ma le molte riflessioni di luce indeboliscono le immagini, e le rendono a stento distinguibili, se gli astri osservati non siano molto luminosi; quindi è forza limitarsi ad osservare il Sole e le stelle di prima grandezza.

Abbiamo supposto il piano dello specchietto perpendicolare a quello del quadrante, nel qual caso l'astro e l'immagine riflessa passano contemporaneamente al terzo filo. Sarà quindi opportuno dar loro una piccola inclinazione affinchè attraversino il campo le immagini riflesse tre o quattro minuti prima che gli astri passino per il meridiano ad oggetto di avere il tempo necessario ad osservare con diligenza le distanze Z', Z''. In tal caso la distanza z abbisogna di una piccola correzione che ci faremo ora ad indagare.

Essendo difficilissimo che il piano del quadrante sia esattamente verticale e coincidente col piano del meridiano, così gli supporremo una piccola deviazione; e quindi sia (*fig. III.*) NZM il meridiano celeste, in cui sia Z il zenit, M il polo boreale; OGC sia il circolo, lungo il quale il piano del quadrante taglia la sfera celeste avente il suo polo in P. Supponiamo che quando la stella in virtù della riflessione dello specchio AB comparisce nell'intersezione del terzo filo col filo orizzontale, occupi nella sfera il posto L, trovandosi distante dal meridiano vero di un angolo orario $LMN = t$. Condotti gli archi di circolo massimo PZ, PLO, ZL, LM, pongasi la latitudine $= L$, la declinazione $= \delta$; sarà $ZM = 90° - L$, $ML = 90° - \delta$;

sia $ZL = \zeta$. Dovendosi abbassare il cannocchiale di un arco costante per tutta l'estensione del quadrante dipendente dalla posizione dello specchio, e dall'errore c cercato per vedere le immagini riflesse, rappresenteremo, come sopra, per $2a + c$ la quantità di questo abbassamento; sarà perciò $CO = Z' + 2a + c$, quantità che è prossimamente $= z$ per l'equazione (2); quindi l'angolo $CPO = Z' + 2a + c$; gli archi ZC, NO rappresentano le deviazioni del quadrante dal piano del meridiano sul zenit, e nella declinazione δ; quantità piccolissime che si ottengono coi metodi che esporremo trattando dello stromento dei passaggi; facciasi $ZC = \alpha$, $NO = \lambda$; LN sensibilmente si confonde con l'arco di paralello nel tempo t percorso dall'astro; perciò sarà (Trig. XVIII) $LN = t \cos\delta$ (fingendo a maggiore semplicità il tempo t ridotto in gradi); sarà pertanto $PZ = 90^\circ + \alpha$, $PL = 90^\circ - t\cos\delta - \lambda$. Ciò posto i triangoli ZML, ZPL daranno

$$\cos\zeta = \cos L \cos\delta \cos t + \operatorname{sen} L \operatorname{sen}\delta \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\cos\zeta = \cos ZPL \operatorname{sen} ZP \operatorname{sen} PL + \cos ZP \cos PL,$$

e sostituendo nel secondo membro di quest'ultima i valori superiori

$$\cos\zeta = \cos(Z' + 2a + c)\cos\alpha\cos(t\cos\delta + \lambda) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(t\cos\delta + \lambda) \quad (2)$$

Indicando per z la distanza vera dell'astro dal zenit nel meridiano, sarà $z = L - \delta$; e prossimamente $= Z' + 2a + c$. Laonde sviluppando in serie i secondi membri delle due superiori equazioni, trascurando le seconde potenze di α, λ, e le potenze di t superiori al quadrato, troveremo

$$\cos\zeta = \cos z - \tfrac{1}{2} t^2 \cos L \cos\delta,$$

$$\cos\zeta = \cos(Z' + 2a + c) - \tfrac{1}{2}(t^2\cos^2\delta + 2t\lambda\cos\delta)\cos z - \alpha t\cos\delta,$$

dalle quali formeremo facilmente la seguente

$$2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(Z' + 2a + c - z)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(Z' + 2a + c + z) = \tfrac{1}{2}t^2\cos\delta(\cos L - \cos\delta\cos z) - t\lambda\cos\delta\cos z - \alpha t\cos\delta.$$

Il coefficiente di $\tfrac{1}{2}t^2\cos\delta$, ponendovi $z = L - \delta$, facilmente si riduce alla forma $-\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}(L - \delta) = -\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen} z$; osservando che trascurandosi le potenze superiori a t^2, α, λ si ha $\tfrac{1}{2}(Z' + 2a + c + z) = z$, la precedente riducesi alla seguente

$$Z' + 2a + c - z = -\tfrac{1}{2}t^2\cos\delta\operatorname{sen}\delta - t\lambda\cos\delta\cot z - \alpha t\frac{\cos\delta}{\operatorname{sen} z} \quad (3)$$

Fingasi ora (per non cambiar figura) che L rappresenti quel punto della sfera celeste, a cui sembra corrispondere l'astro per la riflessione dell'orizzonte artificiale, e pongasi $ZL = \zeta'$; sarà $\zeta' = 180^\circ - \zeta$, o prossimamente $= 180^\circ - (L - \delta) = 180^\circ - L + \delta$, $CO = Z'' + 2a + c$; detto t' l'angolo orario ridotto in gradi corrispondente al momento in cui si osservò la distanza Z'', l'equazione (1) cangiando L in $180^\circ - L$, δ in $-\delta$, t in t' darà

$$\cos\zeta' = -\cos L \cos\delta \cos t' - \operatorname{sen} L \operatorname{sen}\delta \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nel triangolo poi ZPL, si avrà $ZP = 90° + \alpha$, $PL = 90° - t' \cos\delta - \lambda'$ ponendo $NO = \lambda'$, $ZPL = Z'' + 2a + c$; quindi la seguente equazione

$$\cos\zeta' = \cos(Z'' + 2a + c)\cos(t'\cos\delta + \lambda')\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(t'\cos\delta + \lambda') \quad (5)$$

Sviluppando in serie i seni ed i coseni degli archi piccolissimi si avrà (osservando che $Z'' + 2a + c = 180 - z$ prossimamente)

$$\cos\zeta' = \cos(180° - z) + \tfrac{1}{2} t'^2 \cos L \cos\delta,$$
$$\cos\zeta' = \cos(Z'' + 2a + c) + \tfrac{1}{2}(t'^2 \cos^2\delta + 2t'\lambda'\cos\delta)\cos z - \alpha t'\cos\delta.$$

Uguagliando i due valori di $\cos\zeta'$, con riduzioni simili alle precedenti si ottiene

$$180° - z - Z'' - 2a - c = -\tfrac{1}{2} t'^2 \cos\delta \operatorname{sen}\delta - t'\lambda'\cos\delta \cot z + \frac{\alpha t'\cos\delta}{\operatorname{sen} z} \quad (6)$$

La semisomma delle equazioni (3), (6) darà

$$z = 90 + \tfrac{1}{2}(Z' - Z'') + \frac{(t^2 + t'^2)}{4R''}\cos\delta \operatorname{sen}\delta + \frac{t'\lambda' + t\lambda}{2R''}\cos\delta \cot z$$
$$- \frac{\alpha(t' - t)}{2R''\operatorname{sen} z}\cos\delta \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

dove dividesi per il numero dei secondi R'' contenuti nel raggio per ridurre i coefficienti a secondi di grado, e dove i termini moltiplicati per λ, λ', α saranno trascurabili, se con qualche accuratezza sia stato ridotto il quadrante al piano del meridiano.

Ottenuta così la distanza vera dal zenit mediante le osservazioni dell' immagine riflessa fatte tre o quattro minuti prima che l' astro passi al meridiano, si osservi direttamente la sua distanza Z nel meridiano, la quale darà l' equazione $Z - c = z$, donde si otterrà tosto l' errore di collimazione $c = Z - z$.

29. *Descrizione del nonio*. (*fig. IV*) Sia una linea retta AB divisa (partendo da un' origine qualunque) in parti uguali, le quali si vogliano suddividere in parti più piccole, per esempio in 6 parti. Si ponga accanto alla AB un pezzo CD che abbracci 5 di queste parti precisamente, ed in modo congiunto alla AB, che col mezzo di una vite si possa trasportare lungo di essa quanto lentamente si vuole. Divisa la CD in sei parti uguali, sarà ciascuna $\frac{5}{6}$ di una parte di AB; e se (come la figura indica) la divisione o di CD coincida con la divisione 10 di AB, mentre la divisione 6 coincide con la divisione 15, è palese che la divisione 1 di CD rimarrà indietro della divisione 11 di AB per $\frac{1}{6}$ di parte; la divisione 2 per $\frac{2}{6}$, e così di seguito. Se ora spingasi avanti CD in modo che la divisione 1 coincida con 11, l' estremità D disterà del principio di numerazione di AB

di $15\frac{1}{6}$; se la divisione 2 corrisponderà alla sottoposta 12, la distanza sarà di $15\frac{2}{6}$, così di seguito.

Il pezzo CD appellasi *nonio*, da taluno anche Verner, questionandosi se Nunnez o Verner siano stati di questo semplice apparato gl' inventori. Generalmente poi è palese che facendo al nonio abbracciare $n-1$ parti di AB, e dividendolo in n parti, egli marcherà le parti $n.^e$ delle divisioni segnate in AB. Lo stesso artificio si applica per suddividere gli archi circolari. Così nel quadrante murale sopra descritto la divisione interna è scolpita di 5 in 5 minuti; il nonio abbraccia 9 di queste parti, ed è diviso in 10; egli dà dunque direttamente un arco di $\frac{5'}{10} = 30''$. La vite poi che lo spinge avanti dà i minuti secondi con l' artificio sopra accennato.

30. *Scolio*. Furono già nello scorso secolo molto in uso i quarti di circolo, quando non essendo la meccanica pratica ancora giunta all'odierna perfezione, si richiedevano macchine di grandi dimensioni, nelle quali le piccole irregolarità delle divisioni abbracciassero archi minimi, ed avessero minore influenza nelle distanze dal zenit osservate. Avevano però l' incomodo di non potersi prestare che alle osservazioni delle stelle fra il zenit e l' orizzonte dalla parte di mezzodì se la faccia divisa è rivolta a levante; o dal zenit e l' orizzonte verso il settentrione se è rivolta a ponente. Quindi per potere osservare con facilità tutte le stelle, fa duopo averne due in uno stesso stabilimento. Ora che l'arte di dividere i circoli è di gran lunga perfezionata, più comodamente si adoprano i circoli interi di tre piedi di diametro, i quali si adattano ad una colonna verticale girevole intorno a due perni affinchè osservando le distanze degli astri colla faccia rivolta a levante, indi colla faccia rivolta a ponente, nella loro semisomma sparisca l' errore del principio. Ramsden il primo costruì uno di questi circoli per l' Osservatorio di Palermo; indi Reichenbach in Monaco, e l' Instituto Politennico di Vienna molti ne ha procurati per le principali Specole, ai quali avendo congiunto il vantaggio delle *ripetizioni*, sono giunti ad un' esattezza sorprendente che è difficile oltremodo di superare. La descrizione però di questi celebri stromenti troppo ci allontanerebbe dal nostro proposito, e per essa rimandiamo ad altre opere, fra le quali meritano di essere particolarmente citati i Commentarii dell' Osservatorio Reale di Napoli pubblicati dal signor Brioschi, ove si troveranno molte eccellenti riflessioni sul loro uso, e specialmente una interessante Memoria intorno al modo di tener conto delle flessioni del cannocchiale nelle sue diverse posizioni intorno al

lembo; i libri della Reale Specola di Palermo; la collezione delle osservazioni di Bessel, di Littrow ec.

II. *Istromento dei passaggi*. *Fig*. *V*.

31. Questa macchina destinata ad osservare con tutta l'esattezza il momento del passaggio di un astro per il meridiano sia per determinarne la sua *AR*, come anche per assegnare la correzione dell'orologio siderale, è una delle più utili nella pratica dell'Astronomia. Si potrebbe in vero con un quadrante murale osservare il tempo della culminazione degli astri, se questo fosse collocato nel piano del meridiano; ma oltrechè non si vedrebbero che le stelle culminanti fra il zenit e l'orizzonte da una parte soltanto, riesce eziandio sommamente difficile, che per la sua gran mole ed estensione il suo lembo sia compreso tutto nel piano del meridiano, e vi si conservi. Dal primo gravissimo inconveniente sono esenti i circoli interi; ed è anche riuscito al celebre Reichenbach di costruire dei circoli meridiani, i quali servano al doppio ufficio d'indicare i tempi dei passaggi e le distanze dal zenit. Sono però queste preziose macchine molto costose, e difficili ad ottenersi; crediamo quindi sufficiente esporre la descrizione dello stromento dei passaggi nell'ordinaria costruzione, tanto più che le verificazioni di questo servono di guida e norma anche per quello, di cui se ne riscontra una conveniente esposizione nel VI. numero delle osservazioni astronomiche di Konigsberg pubblicate dal sig. Bessel.

32. La *figura V*. rappresenta lo stromento dei passaggi sopra i suoi sostegni; *AB* è un cannocchiale girevole intorno ad un asse orizzontale *EF* terminato in due perni o piccoli cilindri di acciajo di uguale diametro, i quali appoggiano ciascuno sopra due piani inclinati di metallo fissi nei sostegni *P*, *Q*. I due nominati cilindri sono disposti intorno ad un asse comune condotto per i centri delle loro basi, il quale costituisce eziandio l'asse di rotazione.

L'oculare del cannocchiale è una piccola lente di corta distanza focale, od un sistema di due lenti congiunte insieme secondo il metodo di Ramsden in modo che il foco loro cada fuori del tubo in cui sono incassate, e combini col foco della lente obbiettiva. Il tubo che porta gli oculari si può condurre orizzontalmente mediante una vite *a* per aumentare alcun poco il campo della visione, e per poter tenere nel centro del medesimo gli astri quando si avvicinano al meridiano. Nel foco comune dell'obbiettivo e del sistema degli oculari havvi un diaframma per contornare il campo, nel quale sono tesi cinque (talvolta anco sette) sottilissimi fili verticali equidistanti, ed un filo orizzontale; l'intersezione del terzo filo col filo orizzontale costituisce l'asse ottico del cannocchiale. Il diaframma che porta i fili si può alcun poco spingere da levante verso ponente con una piccola vite per condurre la detta intersezione nell'asse, se non vi fosse. Due piccole viti

r, r servono a volgere il tubo del diaframma per rendere verticale la direzione dei cinque fili del micrometro.

Il pezzo che sostiene il perno E porta un semicircolo diviso in gradi e minuti con l'ajuto di un nonio, per potere disporre l'asse ottico del cannocchiale in qualunque data distanza dal zenit; il centro di questo semicircolo cade nell'asse di rivoluzione EF. Due opposte viti spingono dal mezzogiorno verso il settentrione, o viceversa, il sostegno del perno E col semicircolo in esso infisso ad oggetto di condurre l'asse di rotazione nella direzione del vero levante al vero ponente. L'altro appoggio del perno F si può con una vite q sollevare od abbassare per rendere orizzontale l'asse di rotazione. Due pesi H, H col mezzo di due leve aventi i loro fulcri in i, i distruggono gran parte del peso di tutto lo stromento, affinchè non ne graviti nei perni che una piccolissima porzione, senza di che per il forte attrito negli appoggi difficile ne risulterebbe il moto, e presto si altererebbe la figura dei cilindri.

Il cilindretto d'acciajo congiunto al pezzo F ha un largo foro longitudinale situato di faccia al lungo cannello cilindrico m, per cui i raggi luminosi procedenti dalla lanterna X s'introducono nell'interno del cannocchiale. Il dado R, a cui con forti viti si congiungono i coni troncati E, F, ed i tubi A, B, è pure forato per lasciare libero il passaggio alla luce della lucerna dalla parte di F, ed ha un largo diaframma inclinato all'asse ottico del cannocchiale di gradi 45 pulito a specchio che rimanda verso A la luce della lanterna per rendere in tempo di notte visibile il campo ed i fili del micrometro. Si può regolare l'intensità di questa illuminazione mediante una tanaglia situata fra il tubo m ed il cilindretto d'acciajo F, la quale si apre e chiude col mezzo del manubrio o.

Per ultimo il livello AB (*fig. VI.*) costituito da una canna di vetro internamente lavorata appoggiata a due sostegni G, G col mezzo degli uncini F, F si può applicare ai perni cilindrici dello stromento per esplorare la posizione dell'asse di rotazione rapporto all'orizzonte. La sezione longitudinale della canna deve essere un arco di circolo di gran raggio; nella sua parte superiore sono scolpite di qua e di là della metà delle divisioni in parti uguali, e quando l'estremità della *bolla* del livello corrisponde a divisioni di ugual nome, la corda dell'arco abbracciato e l'asse del livello stesso è orizzontale; e perciò orizzontale sarà pure la linea dell'asse dei sostegni F, F se essa siasi precedentemente resa paralella all'asse del livello, abbassando od alzando opportunamente col mezzo delle viti p, p gli appoggi G, G. Le piccole punte a, a scorrevoli lungo l'asta di ottone soprapposta alla canna di vetro servono a meglio indicare gli estremi della bolla, e le sue variazioni dipendenti dai cambiamenti di temperatura.

33. Esposti i principali pezzi dello stromento dei passaggi, veniamo a dire brevemente della sua verificazione. Per procurare col suo mezzo buone osservazioni richiedesi che girando intorno l'asse EF l'asse ottico dello stromento dirigasi esattamente in tutti i punti al meridiano celeste; ed è perciò evidente che deve l'asse di rivoluzione essere orizzontale, perpendicolare all'asse ottico del cannocchiale, e diretto dal vero levante al vero ponente.

1.° A rendere l'asse di rivoluzione orizzontale, stabiliti gli appoggi in modo che esso abbia prossimamente la direzione ora indicata di levante a ponente, supporremo a bel principio i perni o cilindri di acciajo esattamente uguali. Rivolto il cannocchiale verso l'orizzonte, sicchè l'obbiettivo guardi, per esempio, il mezzodì, si appenderà il livello, e si noteranno le divisioni corrispondenti agli estremi della bolla. Levato il livello, si tornerà ad appendere inversamente, di modo che l'uncino che prima abbracciava il perno E (*fig. V.*) passi in F, e viceversa. Se la bolla ritorna alle stesse divisioni, sarà la linea d'appoggio degli uncini sui perni paralella all'asse del livello; in caso diverso si varieranno i sostegni della canna mediante le viti p, p finchè nelle due inverse posizioni la bolla corrisponda esattamente agli stessi punti; e quando ciò succeda si alzerà EF colla vite q finchè gli estremi della bolla corrispondano a uguali divisioni. Con ciò l'asse sarà orizzontale. Spesso avviene che prossimamente l'asse del livello sia paralello alla linea degli appoggi, e l'asse di rotazione anche prossimamente orizzontale; e piuttosto che correggere il piccolo errore si ami tenerne conto. Conoscendo allora il valore di ciascheduna particella delle divisioni scolpite nella canna, si determinerà l'inclinazione dell'asse di rotazione nel modo seguente:

Tenendo sempre il cannocchiale in una posizione orizzontale, si appenda il livello ai perni, e sia p il numero, in cui fermasi la bolla dalla parte di ponente, l quello in cui è contemporaneamente ferma dalla parte di levante. Si inverta poscia il livello, e siano in questa nuova posizione gli estremi della bolla fissi in p', l'; k sia il valore di una parte del livello in secondi di grado; i la cercata inclinazione. Facilmente si vedrà essere $i = \frac{k}{4}(p + p' - l - l')$, dove se riuscirà i positivo, l'asse si solleverà al di sopra dell'orizzonte a ponente, ed a levante se sarà i negativo.

Il numero k, quantità che rimane presso a poco costante, variando solo un poco coll'aumento di temperatura, si dovrà accuratamente determinare. L'astronomia pratica presenta a ciò varii mezzi, fra i quali io soglio adoprare il seguente: portasi verso l'orizzonte lungo il quadrante murale (*fig. I.*) il cannocchiale, ed ivi si fissa in modo che la

direzione di uno dei bracci $c\,c$ della sua armatura di ottone inferiore sia orizzontale; si appende ad esso il livello, e notasi diligentemente la posizione di un'estremità della bolla. Fatto ciò col mezzo del micrometro pq si fa variare l'inclinazione di $c\,c$ (e quindi dell'asse del livello) di 10″; il numero delle parti che trascorrerà la detta estremità della bolla diviso per 10 darà il valore di k.

2.° Suppongono i precedenti precetti, che i due cilindri orientale ed occidentale dell'asse di rotazione siano esattamente uguali, ed in vero gli artefici devono porre in ciò la massima attenzione. A fronte però di ogni diligenza, è sommamente difficile evitare una minima disuguaglianza, ed importa moltissimo tenerne conto quando vi sia. Fingiamo pertanto che sia r' il raggio del cilindro occidentale, r quello del cilindro orientale, h la distanza orizzontale dei punti, ai quali si appende il livello; fingiamo inoltre l'asse di rotazione orizzontale perfettamente. Condotto per questo un piano verticale che tagli lungo due linee rette le superficie superiore ed inferiore dei cilindri, sia la superiore indicata con S, l'inferiore con I. Sarà (riguardando $r'-r$ come una piccolissima quantità) la linea S elevata al di sopra dell'asse orizzontale di $\frac{r'-r}{h}$; ed I di altrettanto depressa sotto il medesimo. Ridotta pertanto la linea S ad essere orizzontale, si deprimerà l'asse di rotazione sotto l'orizzontale di un angolo $=\frac{r'-r}{h}$, che porremo $=\varphi$, ed I si deprimerà di 2φ. Risulta da ciò, che se l'asse di rotazione coll'applicazione del livello apparisca sollevato sopra l'orizzonte dalla parte di ponente di un angolo $=i$, la sua vera inclinazione sarà $=i-\varphi$. Si determinerà poi l'angolo costante φ al modo seguente mediante il livello. Dispongasi il cannocchiale nella direzione orizzontale coll'obbiettivo rivolto a mezzodì, e rendasi orizzontale la linea S in questa posizione alzando od abbassando convenientemente il perno orientale colla vite q; dopo ciò rivolgasi il cannocchiale coll'obbiettivo verso il settentrione, con che la linea I passa nella posizione superiore, e col mezzo del livello si determini la sua inclinazione all'orizzonte; la metà di questa sarà $=\varphi$, che dovrà riguardarsi come positiva, se si eleva verso ponente, ed annunzierà il raggio del perno occidentale più grande dell'orientale.

3.° Reso orizzontale l'asse di rotazione, conviene esaminare se l'asse ottico del cannocchiale, o per meglio dire la linea condotta dall'intersezione del terzo filo col filo orizzontale pel centro dell'obbiettivo, sia al medesimo perpendicolare, e diretta nel piano del meridiano. A tale oggetto fingeremo che nella facciata di una fabbrica a tramontana situata nella direzione del meridiano, e distante almeno un migliajo di tese,

sia già stata collocata una *mira meridiana*. Quella di cui faccio uso è un circoletto di ottone incassato in un muro, annerito con una vernice ad olio, in cui è stato disegnato un diametro verticale con colore bianco pure ad olio. Il diametro di questo circoletto sottende dal centro dell' obbiettivo un angolo di 13″, 2, ed è stato stato misurato con un eccellente micrometro di Amici a separazione d'immagini; il centro di questo circolo, e quindi il nominato diametro verticale trovasi nella direzione del meridiano condotto pel centro dell' obbiettivo abbastanza esattamente.

Ciò posto, rivolgesi il cannocchiale AB nella sua posizione ordinaria verso la mira meridiana, e muovesi il perno occidentale E dal mezzogiorno verso il settentrione, finchè il terzo filo verticale cuopra esattamente il segno bianco della mira. Levati poscia i contrappesi H, H e le leve che li sostengono, s'inverte lo stromento in modo che il perno orientale passi nell' appoggio occidentale, e viceversa. Rivolto in questa nuova posizione alla mira il cannocchiale, se il terzo filo collima esattamente al meridiano, sarà l'asse ottico al tempo stesso perpendicolare all' asse di rivoluzione, e situato nel piano del meridiano; in caso diverso la differenza rappresenterà il doppio di ciò che appellasi errore di *collimazione*, e dovrà togliersi per metà col movimento del perno occidentale, per metà col movimento del diaframma che sostiene i fili del micrometro.

34. Per potere ridurre gli istanti degli appulsi di un astro osservati ai fili laterali, come se fossero stati osservati al terzo filo direttamente, è necessario conoscere con ogni esattezza il tempo siderale che in ogni declinazione impiega una stella a pervenire da ciaschedun filo al terzo filo. Supponiamo il cannocchiale rivolto all' equatore, e fingiamo che la distanza del primo dal terzo filo abbracci un arco di equatore $= d$ secondi; il tempo che una stella impiegherà a passare dal primo sul terzo filo sarà $= \frac{d}{15}$ secondi di tempo; rivolto poi ad un paralello di declinazione δ, il tempo richiesto perchè un astro attraversi lo stesso spazio sarà $\frac{d}{15 \cos \delta}$ (Trig. XVIII.).

Ciò posto, si determineranno le distanze equatoriali dei fili a questo modo: Si rivolga lo stromento ad un astro di declinazione δ mentre si avvicina al meridiano, e si osservi il numero dei secondi di tempo impiegati a passare dal primo al terzo filo; dal secondo al terzo; dal terzo al quarto; dal terzo al quinto. Questi intervalli moltiplicati per $\cos \delta$ daranno le distanze equatoriali dei fili in tempo siderale; le quali (*) devono risultare le stesse qualunque declinazione abbia la stella.

(*) Questa regola esige una piccola correzione per la polare, e per le stelle più

Per eludere gli errori inevitabili delle osservazioni, si prenderà il medio di molte simili determinazioni.

Il metodo ora esposto è semplice, e generalmente praticato; si può ad esso con vantaggio sostituire il seguente dovuto al signor dott. Gauss, qualora si possieda un circolo moltiplicatore, od un teodolito pure moltiplicatore con esatte divisioni.

Col mezzo della Luna, del Sole, o delle stelle riducasi il cannocchiale al punto della chiara visione portando i fili esattamente nel foco dell' obbiettivo, dove appariranno precisi e ben contornati. Quindi in un giorno sereno si levi lo stromento dal suo posto per porlo sopra un tavolino in modo che l' asse EF rimanga verticale se adoprasi il circolo, orizzontale se il teodolito. Levate le lenti oculari senza alterare la posizione dei fili, e rivolti questi all' aperto cielo, se dirigasi ad essi di faccia all' obbiettivo il cannocchiale del circolo, si vedranno i fili precisi come fossero tesi nella volta celeste, poichè i raggi luminosi da essi procedenti sortono dall' obbiettivo stesso in direzioni parallelle. Misurando l' angolo, che sembrano abbracciare le distanze del primo dal terzo ec., queste saranno evidentemente le cercate distanze equatoriali, che divise per 15 saranno ridotte in tempo siderale.

Ottenute con l' uno o con l' altro mezzo le distanze equatoriali dei fili in tempo siderale, si divideranno per i coseni delle declinazioni di grado in grado, o di mezzo grado in mezzo grado, e si apparecchierà così una tavola, la quale servirà a ridurre al terzo filo gli appulsi delle stelle osservati ai fili laterali per prendere il medio dei risultamenti dedotti dalle singole osservazioni.

35. Se le verificazioni tutte superiormente esposte siano state bene praticate, l' asse ottico del cannocchiale collimerà esattamente al meridiano celeste, e l' appulso di un astro al terzo filo segnerà nell' orologio l' istante del suo passaggio per il meridiano. Accade spesso che trovisi lo stromento dei passaggi alcun poco fuori della sua vera posizione, e non si abbia il tempo di regolarlo; conviene allora applicare ai passaggi osservati pel terzo filo alcune piccole correzioni, i fondamenti delle quali verremo ora esponendo partitamente.

1°. Sia l' asse di rotazione orizzontale, e sia nullo l' errore di collimazione; ma l' asse ottico del cannocchiale declini dal meridiano di un angolo z. È palese, che l' intersezione del terzo filo col filo orizzontale descriverà un piano verticale che passerà per il zenit tagliando il meridiano sotto un angolo z, che supporremo positivo, quando giace nell' emisfero orientale dalla parte di mezzodì. Sia (*fig. VII.*) SZP il meridiano; $S'Z$ il verticale descritto dallo stromento che in-

vicine al polo. Si troverà facilmente, che detta δ la declinazione, t l' intervallo di tempo osservato, d la distanza equatoriale in arco, sarà questa determinata dall' equazione $\text{sen}\,\frac{1}{2}\,d = \text{sen}\,\frac{1}{2}(15\,t)\cos\delta$; ovvero prossimamente $d = 2\,R''\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(15\,t)\cos\delta$.

contra nel zenit Z il meridiano sotto un angolo z piccolissimo, di cui si possano trascurare le potenze superiori alla prima; S' un astro di declinazione δ, che giunge prima al verticale $Z S'$, quindi al meridiano in S; P il polo dell'equatore. Condotto $P S'$, sarà $P S' = 90 - \delta$, $Z P = 90 - L$, $Z S$ (che prossimamente è $= Z S'$) $= L - \delta$; l'angolo orario P ridotto in tempo, ed aggiunto al momento del passaggio osservato in S' darà il cercato passaggio dell'astro pel meridiano. Ora il triangolo sferico $Z P S'$ dà $\operatorname{sen} P = \frac{\operatorname{sen}(L-\delta)}{\cos\delta} \operatorname{sen} z$; quindi la cercata correzione, in virtù della supposta piccolezza degli angoli P, z, sarà $= \frac{\operatorname{sen}(L-\delta)}{15\cos\delta} z = A z$ ponendo per brevità

$$A = \frac{\operatorname{sen}(L-\delta)}{15\cos\delta} = \frac{1}{15}(\operatorname{sen} L - \cos L \operatorname{tang}\delta).$$

Per le stelle australi deve farsi δ negativo; per i passaggi delle stelle boreali sotto il polo si troverà facilmente $Z S = 180° - (L + \delta)$, quindi tanto per le stelle australi, quanto per le boreali sotto il polo

$$A = \frac{\operatorname{sen}(L+\delta)}{15\cos\delta} = \frac{1}{15}(\operatorname{sen} L + \cos L \operatorname{tang}\delta).$$

2.° Sia l'asse ottico nell'orizzonte diretto allo scopo meridiano, ed esattamente perpendicolare all'asse di rotazione, sicchè sia nullo l'errore di collimazione; ma sia quest'ultimo asse elevato sopra l'orizzonte dalla parte di ponente di un piccolissimo angolo i. L'asse ottico del cannocchiale descriverà un circolo massimo della sfera inclinato al meridiano di i, situato dalla parte d'oriente, che lo taglierà nei due opposti punti dell'orizzonte, come vedesi nella *fig. VIII*, dove $M Z P N$ rappresenta il meridiano vero; $M Z' N$ il circolo descritto dall'asse ottico; P il polo boreale; M il mezzogiorno; N il settentrione. Una stella di declinazione δ passi per il terzo filo del cannocchiale in S'; condotto il circolo massimo $P S'$ dovrà la sfera ruotare dall'angolo $Z P S' = P$, perchè giunga al meridiano vero. L'angolo P si determina poi facilmente nel seguente modo. Col polo M ed intervallo $M Z = 90°$ descritto $Z Z' = i$, guidisi $S' S$ paralello a $Z Z'$; sarà $Z S = Z S' = L - \delta$; (prossim.); $S S' = i \cos(L - \delta)$ (Trig. XVIII); in virtù della sua piccolezza si potrà assumere $S S'$ per l'arco di circolo massimo condotto da S' perpendicolare sul meridiano, con che il triangolo sferico $Z S S'$ darà $\operatorname{tang} Z = \frac{\operatorname{tang} S S'}{\operatorname{sen} Z S}$, ovvero prossimamente $Z = \frac{i\cos(L-\delta)}{\operatorname{sen}(L-\delta)}$. Dopo ciò il triangolo $P Z S'$ darà $\operatorname{sen} P : \operatorname{sen} Z :: \operatorname{sen} Z S' : \operatorname{sen} P S'$, dalla quale tosto si dedurrà

$P = \frac{i \cos (L - \delta)}{\cos \delta}$, ed il tempo impiegato a giungere nel meridiano sarà $= \frac{i \cos (L - \delta)}{15 \cos \delta}$, dove per le stelle australi si dovrà fare δ negativo.

Per il passaggio delle stelle boreali sotto il polo, venendo esse dall' emisfero occidentale nell' orientale incontrano prima il meridiano vero, quindi il circolo descritto dallo stromento. Dietro ciò si troverà la correzione del tempo

$$= - \frac{i \cos Z s}{15 \cos \delta} = - \frac{i \cos (180° - L - \delta)}{15 \cos \delta} = \frac{i \cos (L + \delta)}{15 \cos \delta}.$$

Se poi vi ha una disuguaglianza nei perni, supponendo φ l' inclinazione dell' asse dovuta alla differenza dei perni; i l' inclinazione data dalla osservazione diretta del livello, si dovrà in luogo di i scrivere $i \mp \varphi$, adoperando il segno superiore se il perno occidentale sia il più grande, l' inferiore nel caso contrario.

3.° Siavi un piccolo errore di collimazione, che rappresenteremo per e da valutarsi positivamente, quando l' intersezione dei fili giace all' oriente del meridiano. È palese che in questo caso l' intersezione dei fili descriverà un circolo minore della sfera paralello al meridiano, distante da esso di e; quindi la correzione del passaggio sarà $= \pm \frac{e}{15 \cos \delta}$, valendo il segno $+$ per i passaggi superiori, il segno $-$ per i passaggi inferiori.

36. Se ora tutti e tre i sopra descritti errori abbiano luogo contemporaneamente, la somma delle ottenute correzioni, giusta i principii del calcolo differenziale, aggiunta al tempo osservato del passaggio dell' astro per il terzo filo darà il vero passaggio al meridiano, se conoscansi z, $i \mp \varphi$, e.

Ottenuto poi il tempo nell' orologio del passaggio per il meridiano, se ad esso si applichi la correzione dell' orologio, si avrà l' ascensione retta della stella. Chiamando pertanto $+ k$ la correzione dell' orologio, t il tempo osservato del passaggio per il terzo filo, ed α l' AR della stella ridotta in tempo, si avrà dietro le cose precedenti per una stella di declinazione δ nel passaggio sopra il polo

$$\alpha = t + k + \frac{z \operatorname{sen} (L - \delta)}{15 \cos \delta} + \frac{(i \mp \varphi) \cos (L - \delta)}{15 \cos \delta} + \frac{e}{15 \cos \delta} \; . \; . \; . \; \text{(A)}$$

e per i passaggi inferiori

$$\alpha = t - 12^h + k + \frac{z \operatorname{sen} (L + \delta)}{15 \cos \delta} + \frac{(i \mp \varphi) \cos (L + \delta)}{15 \cos \delta} - \frac{e}{15 \cos \delta} \; \text{(B)}$$

Per le stelle australi si farà uso dell' equazione (A) facendovi δ nega-

tivo; nei passaggi inferiori la quantità $L + \delta$ sarà $> 90°$, e converrà fare attenzione alle regole dei segni nell'equazione (B).

La quantità e non varia sensibilmente col tempo se abbiasi cura di non alterare la posizione del tubo oculare, lasciando sempre intatte le viti $r\,r$ che lo sostengono (*fig. V.*); quindi se sia stata questa una volta annullata con diligenza, si conserverà $= 0$; le quantità poi z, i variano continuamente nel corso di un giorno, sopra tutto in tempo di estate, per le piccole alterazioni indotte nelle fabbriche dalla variazione della temperatura, e sono in generale sottoposte a piccole oscillazioni periodiche. Coll'ajuto del livello si può ad ogni osservazione, o a diverse ore del giorno determinare i, ed anco si può di giorno stimare il valore di z dall'inspezione della *mira*. Durante la notte poi, non vedendosi lo scopo meridiano, il valore di z non può aversi per questa via; le equazioni (A) o (B) somministrano un mezzo molto comodo e spedito per determinare al tempo stesso z e k coll'osservazione di due stelle conosciute, le quali abbiano una declinazione molto differente, se siasi determinato i col livello, ed e coll'inversione. In fatti conoscendo α, nell'equazione (A) tutto è noto a riserva di k e di z; quindi l'osservazione delle due nominate stelle darà due equazioni, nelle quali l'incognita z acquisterà coefficienti molto diversi, e perciò da esse agevolmente si determineranno i valori di k e di z. Che se si avranno molte di queste equazioni, si faranno tutte concorrere alla determinazione di queste due incognite, e si avrà così un mezzo pronto e sicuro per assegnare con ogni esattezza la correzione di un orologio regolato al tempo siderale.

Potrebbe credersi che mediante l'osservazione di quattro stelle conosciute situate a declinazioni molto differenti si potesse giungere dietro l'equazione (A) a determinare in un modo analogo i valori di z, $i \mp \varphi$, e, k; ma con un poco di attenzione tosto si scorge che ciò non è possibile. In fatti la detta equazione, ponendo

$$x = \frac{1}{15}[z \operatorname{sen} L + (i \mp \varphi) \cos L], \quad y = \frac{1}{15}[-z \cos L + (i \mp \varphi) \operatorname{sen} L],$$

si può scrivere sotto la seguente forma

$$\alpha = t + k + x + y \operatorname{tang} \delta + \frac{e}{15 \cos \delta},$$

dalla quale rendesi manifesto non potersi anco con quattro osservazioni separare k da x; non potendosi adunque assegnare i valori di x e di y separatamente non si potranno avere nè meno z, $i \mp \varphi$, poichè dalle fatte posizioni risulta

$$z = 15\,(x \operatorname{sen} L - y \cos L); \quad i \mp \varphi = 15\,(x \cos L + y \operatorname{sen} L).$$

III. *Macchina equatoriale o parallattica. Fig. IX.*

37. Servono le macchine equatoriali alle osservazioni degli astri

che trovansi fuori del meridiano da qualunque parte del cielo; quindi mentre per l'uso degli stromenti sopra descritti, basta che sieno essi montati in luogo tale della fabbrica, da cui si possa liberare la visuale per vedere l'aperto cielo nella sola direzione del meridiano, queste per lo contrario devono collocarsi nell'ultima sommità in luogo isolato per poterne dirigere a qualunque plaga il cannocchiale. D'ordinario ripongonsi sopra una solida base di marmo o di pietra dura entro una piccola camera rotonda, ricoperta da un tetto conico di rame o di piombo, girevole sopra carrucole, e munito di una porta estendentesi fino al vertice, la quale, girando il tetto, volgesi a quella parte ove occorre di fare l'osservazione. Riescono di sommo comodo e vantaggio nelle osservazioni delle nuove comete, dei nuovi pianeti, quando non si possano osservare al meridiano, e formano perciò il necessario corredo di un osservatorio bene provveduto. Vengono dagli artefici adottate per esse varie disposizioni, le quali però tutte collimano al medesimo fine, e si appoggiano sopra gli stessi principii; quindi brevemente descriveremo quella adottata dal sig. Utzschneider di Monaco nell'equatoriale destinato per l'Osservatorio di Padova, di cui la *fig. IX.* presenta l'aspetto, come vedesi montata sopra una solida base orizzontale di pietra istriana XY, appoggiata a tramontana ad una colonna Z di ferro fuso infissa nella nominata base.

38. Componesi essa precipuamente delle seguenti parti:

1.° Di un circolo intero AA diviso in 24 ore; le ore sono suddivise in minuti, e coll'ajuto del nonio in secondi di tempo. Questo circolo deve rendersi paralello all'equatore celeste, perciò appellasi *equatoriale*.

2.° Di un asse di bronzo BB vuoto internamente perchè sia più leggero. Questo è solidamente congiunto all'equatoriale, tornito con esso, terminato inferiormente in una punta conica, superiormente in un cilindretto C, il cui asse prolungato passa per l'ora nominata punta conica, e riesce perpendicolare al piano dell'equatoriale. Quando la macchina è al suo posto, quest'asse riesce paralello all'asse del mondo, e prolungato passerebbe per i due poli. dell'equatore.

Il perno conico inferiore appoggia sopra un eguale incontro situato nell'interno della scatola di ottone D, il quale mediante un sistema di viti si può spingere da levante verso ponente, ed alzare od abbassare alcun poco, per portare l'asse BB nel piano del meridiano, ed in esso elevarlo esattamente all'altezza del polo. Il perno superiore C appoggia fra due piani inclinati in un pezzo di bronzo fissato con viti alla colonna Z.

3.° Di un circolo EE, diviso in quattro quadranti, dove con l'ajuto di due opposti nonii a, a si leggono i secondi di grado. Intorno al centro di questo circolo è girevole il cannocchiale GG, fisso nel pezzo

che porta i nonii; con una vite di pressione si può fermare in qualunque parte del lembo, e mediante un micrometro se gli procurano i più piccoli movimenti. Il circolo *EE* è con forti viti fissato nel parallelepipedo di bronzo *F*, che fa angolo retto con l'asse *BB* in modo che il suo piano riesca a quest' asse paralello, e prolungato passi per i poli dell' equatore, e riesca perpendicolare all' equatoriale *AA*. Il diametro di *EE* condotto per le divisioni 0° — 0° è per costruzione paralello al piano dell' equatore, e quindi quello condotto per le divisioni 90° — 90° è paralello all' asse del mondo. L' illuminazione del cannocchiale si fa per l' asse con una lanterna *H* in modo analogo a quello esposto per lo stromento dei passaggi. Il peso *P* mediante una leva angolare, che attraversa l' interno della colonna *S* avente il centro di moto in *i*, si elide contro l' asse *BB*, e sostiene il peso della macchina quasi per intero, affine di agevolarne i movimenti, e conservare ai perni per più lungo tempo la loro figura, la quale altrimenti si altererebbe per il forte attrito.

Il paralellepipedo *F*, e due pesi *Q* ad esso congiunti tengono equilibrata tutta la macchina intorno all' asse *BB*.

39. Dalla riferita disposizione delle parti della macchina risulta, che girandosi essa intorno all' asse *BB* uniformemente da levante verso ponente, il circolo *AA* volgesi pure uniformemente nella stessa direzione, conducendo successivamente tutte le sue divisioni in faccia ai nonii *gg* fissi nella scatola *D*; ed il circolo *EE* prenderà al tempo stesso la posizione di tutti i circoli di declinazione. In questo movimento, se il cannocchiale *G G* sia fisso nelle divisioni 0° — 0° del circolo di declinazione *EE*, il suo asse ottico collimerà costantemente all' equatore celeste; ed in generale apparisce, che le divisioni in *EE* scolpite rappresenteranno le declinazioni, ed al cannocchiale si potrà far descrivere un paralello qualunque all' equatore.

Posto ciò, se conducasi il circolo *EE* nella posizione verticale, sarà evidentemente situato nel meridiano; in questa posizione si dispongano i nonii del circolo *AA* in $0^h\ 0'\ 0''$. Se volgasi la macchina a ponente in modo, che una divisione particolare per es. $2^h\ 0'$ del circolo *AA* venga a collocarsi di faccia ai nonii *g*, *g*, prenderà *EE* la posizione del circolo di declinazione di 2 ore pomeridiane, e fissato il cannocchiale in una declinazione particolare per es. 10° bor. comparirà nel campo quella stella, che avendo tale declinazione avrà passato il meridiano di due ore; ed in generale apparisce potersi una tale macchina facilmente dirigere (se sia situato accanto ad essa un orologio siderale) a qualunque stella, di cui conoscasi l'*AR* e la declinazione; potersi anco con essa facilmente determinare la differenza di *AR* e di declinazione di due vicine stelle, che in tempi successivi vengano ad attraversare in virtù del moto diurno lo stesso circolo orario. Data

pertanto la posizione di una di esse, si avrà tosto la posizione dell'altra se fosse incognita.

40. Affinchè poi le differenze osservate di *AR* e di declinazione siano al vero consentanee, richiedesi che la macchina sia esattamente al suo posto, cioè che il circolo *AA* sia esattamente paralello all'equatore celeste, l'asse *BB* diretto verso il polo boreale; inoltre richiedesi che l'asse di rivoluzione del cannocchiale sia perpendicolare a *BB*, ed all'asse ottico affinchè questo stia sempre in un circolo di declinazione. Coll'ajuto di una mira meridiana, e del livello soprapposto al cannocchiale, facilmente in una prima collocazione si soddisfà alle prime due condizioni. Per agevolare il moto rotatorio del cannocchiale intorno al centro del circolo *EE* l'artefice ha fissato nel pezzo che porta i nonii ed il cannocchiale un lungo asse col medesimo tornito che attraversa tutto il paralellepipedo *F*, e sporge in due uguali cilindri un poco fuori da una parte e dall'altra. Levato il cannocchiale dal suo posto rimangono libere queste estremità dell'asse; condotto il circolo *EE* nella posizione verticale con la faccia rivolta a levante, appendesi all'asse un livello rettificato simile a quello della *fig. VI.* Volgesi la macchina lentamente intorno all'asse *BB* coll'ajuto del micrometro *R*, finchè il livello segni la posizione orizzontale.

Levato il livello, girasi a ponente il lembo del circolo *EE* per modo che nell'equatoriale sia indicata una mezza rivoluzione esattamente; allora si torna questo ad applicare, e se di nuovo segna la posizione orizzontale sarà l'asse di rotazione del cannocchiale perpendicolare a *BB*; in caso diverso si corregge l'errore per metà colle viti sottoposte a *D*, che muovono l'asse *BB*, per metà colle viti infisse in *F*, che muovono l'asse dell'alidada e del cannocchiale. Così con pochi tentativi si perverrà a dargli la richiesta posizione; si noterà allora la divisione nell'equatoriale a cui corrisponde la perpendicolarità dei due assi; si riporrà a posto il cannocchiale, e si volgerà allo scopo meridiano per vedere se ad esso collimi. Se ciò non fosse, si dovrebbe correggere l'errore in parte col micrometro dell'equatoriale, in parte colle viti laterali della scatola *D*, che spingono l'asse *BB* da levante a ponente, quindi tornare a verificare la perpendicolarità degli assi. Prima però converrà distruggere l'errore di collimazione, rimirando lo scopo meridiano nelle due inverse posizioni di *EE*, e facendo sì che trovisi nell'intersezione dei fili. Quando siasi giunto a situare l'asse di rotazione del cannocchiale orizzontale, e che questo collimi alla mira, allora sarà l'asse *BB* compreso nel piano del meridiano.

41. Quando i precetti precedenti siano stati opportunamente applicati, la macchina sarà molto vicina al suo vero posto; ma l'ultima esattezza non potrà aversi che con le osservazioni astronomiche. Supporremo da principio l'asse di rivoluzione del cannocchiale esattamen-

te perpendicolare all'asse BB, al che facilmente si perviene coll'ajuto del livello; ma per ciò che riguarda le altre sorgenti di errore vi siano delle piccole deviazioni, e tali da potersene trascurare le potenze superiori alla prima. Se ne determinerà l'influenza nel modo seguente, da cui anco ricaveremo il metodo da praticarsi per determinare con opportune osservazioni la grandezza delle deviazioni.

Primieramente, condotto il cannocchiale in 0° di declinazione, non sia esattamente paralello all'equatoriale AA, ma aberri di un piccolo angolo ι dal paralellismo in modo preso, che quando leggesi una declinazione d, la distanza dal polo di AA sia $90° - (d + \iota)$ in luogo di $90 - d$. Posto ciò, consideriamo la *fig. X.*, nella quale ZPH rappresenti il meridiano vero; P il polo dell'equatore; P' il punto della sfera celeste a P molto vicino, cui corrisponde il polo di AA; S un astro di declinazione $= \delta$, e di $AR = \alpha$, che si osservi coll'equatoriale, quando il suo vero angolo orario ZPS è $= \theta$. Condotti i circoli massimi PS, $P'S$, PP', sia d la declinazione letta nella macchina; sarà $P'S = 90° - (d + \iota)$; $PS = 90° - \delta$; pongasi $PP' = y$; $P'PZ = x$. Sarà $P'PS = x - \theta$, ed il triangolo $P'PS$ darà l'equazione $\operatorname{sen}(d + \iota) = \cos y \operatorname{sen} \delta + \operatorname{sen} y \cos \delta \cos (x - \theta)$, la quale, riguardando y come piccolissimo, $d + \iota$ pochissimo diverso da δ dà
$d + \iota - \delta = y \cos (x - \theta) = y \cos x \cos \theta + y \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta$.

Se ora dal punto P' si abbassa $P'Q$ perpendicolare sul meridiano, a motivo della piccolezza di PP', si può riguardare come rettilineo il triangolo $PP'Q$; ed avremo $PQ = -y \cos x$, $P'Q = y \operatorname{sen} x$.

Ponendo pertanto $PQ = s$, $P'Q = t$, la precedente equazione darà

$$d + \iota - \delta = t \operatorname{sen} \theta - s \cos \theta \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Se si avranno tre di queste equazioni fondate sopra tre osservazioni fatte ad angoli orarii conosciuti, e molto diversi, si potranno determinare le incognite ι, t, s, la prima delle quali darà l'errore del principio di numerazione nel circolo di declinazione; le altre due daranno la posizione del polo della macchina rapporto al polo vero.

Comodissima riesce la determinazione delle precedenti incognite facendo uso di tre osservazioni della polare ordinate nel modo seguente:

1.ª nel passaggio superiore, quando $\theta = 0$. sia $d = d$
2.ª quando $\theta = 6^h = 90°$ . . . . sia $d = d'$
3.ª nel passaggio inferiore, quando $\theta = 180°$ sia $d = d''$

L'equazione (1) darà per ordine le seguenti

$$\left.\begin{aligned} d - \delta + \iota &= -s \\ d' - \delta + \iota &= t \\ d'' - \delta + \iota &= s \end{aligned}\right\} \text{ dalle quali si ottiene } \left\{\begin{aligned} \iota &= \delta - \tfrac{1}{2}(d + d'') \\ s &= \tfrac{1}{2}(d'' - d) \\ t &= d' - \tfrac{1}{2}(d + d''). \end{aligned}\right.$$

È inutile avvertire che le quantità osservate d, d', d'' devono prima essere spogliate dalla rifrazione astronomica per ridurle a quello stato che avrebbe luogo se fosse tolta di mezzo l'atmosfera terrestre. Se i va-

lori di t e di s risultino considerabili si dovrà procurare di diminuirli, movendo opportunamente l'asse BB; se poi siano piccoli, si potrà sempre avere con molta speditezza la declinazione vera di un astro dalla sua declinazione apparente osservata, mediante l'equazione

$$\delta = d + \iota + s\cos\theta - t\,\text{sen}\,\theta \quad . \ . \ . \quad (2)$$

la quale dimostra, che rimanendo costante l'angolo orario (come si suole praticare nelle osservazioni fatte a questi stromenti) le differenze di declinazione sono indipendenti da ι, s, t.

42. Cerchisi ora l'angolo orario θ dietro l'angolo orario apparente dato dalla macchina, ed a tale oggetto si cerchi l'angolo in P' nel triangolo $PP'S$. Ritenendo le denominazioni superiori, si avrà dalla Trigonometria l'equazione (XV, caso III)

$$\cot P' = \frac{\text{tang}\,\delta\,\text{sen}\,y - \cos(x-\theta)\cos y}{\text{sen}\,(x-\theta)} = -\cot(x-\theta) + \frac{y\,\text{tang}\,\delta}{\text{sen}(x-\theta)},$$

donde apparisce essere prossimamente $P' = 180° - (x - \theta)$. Ponendo pertanto $P' = 180° - (x - \theta) - z$, e riguardando z come piccolissimo, si avrà

$$\cot P' = -\cot(x - \theta + z) = -\cot(x-\theta) + \frac{z}{\text{sen}^2(x-\theta)};$$

confrontando i due valori di cot P', si avrà

$$z = y\,\text{tang}\,\delta\,\text{sen}\,(x-\theta) = t\cos\theta\,\text{tang}\,\delta + s\,\text{sen}\,\theta\,\text{tang}\,\delta.$$

Quindi sarà

$$P' = \theta + 180° - x - t\cos\theta\,\text{tang}\,\delta - s\,\text{sen}\,\theta\,\text{tang}\,\delta.$$

Se ora per il zenit Z, e per P' conducesi un circolo massimo, sarà questo il meridiano apparente; l'angolo $ZP'S$, che porremo $=\theta'$, sarà l'angolo orario apparente nella macchina, ed è palese che sarà

$$\theta' = P' - PP'Z = 180° + \theta - (x + PP'Z) - t\cos\theta\,\text{tang}\,\delta - s\,\text{sen}\,\theta\,\text{tang}\,\delta.$$

La quantità costante $180° - (x + PP'Z)$ potrà riguardarsi come l'errore del principio di numerazione dell'equatoriale che rappresenteremo per e; dietro ciò si avrà l'angolo orario vero dall'apparente osservato, mediante l'equazione

$$\theta = \theta' - e + t\cos\theta\,\text{tang}\,\delta + s\,\text{sen}\,\theta\,\text{tang}\,\delta \quad . \ . \ . \quad (3)$$

43. Suppongono i precedenti precetti che l'asse di rotazione del cannocchiale sia perpendicolare all'asse ottico, ed all'asse BB dell'equatoriale, le quali due circostanze possono non aver luogo. Abbia luogo la seconda condizione, e manchi la prima, sicchè siavi un piccolo errore di collimazione, che indicheremo per k. L'asse ottico apparente descriverà un paralello al circolo di declinazione, e se rimane l'intersezione del filo medio col filo equatoriale a levante del vero asse ottico, sarà in una declinazione δ il tempo impiegato a passare dal filo medio nel circolo di declinazione $= \frac{k}{\cos\delta}$, il qual termine dovrassi ag-

giungere al secondo membro dell' equazione (3). Le declinazioni per questa causa non soffriranno alterazione.

Sia in secondo luogo nullo l' errore di collimazione; ma l' asse di rotazione del cannocchiale non sia perpendicolare all' asse dell' equatoriale; e ciò in modo che quando il circolo di declinazione sta nel piano del meridiano colla faccia rivolta a levante, l' asse di rotazione in luogo di essere orizzontale, sia elevato a ponente di un angolo i. L' asse ottico del cannocchiale descriverà un circolo massimo inclinato al meridiano di un angolo i disposto verso levante, il quale in conseguenza taglierà il meridiano nell' equatore, come può facilmente concepirsi dalla *fig. VIII.* dove fingasi MZN rappresentare il meridiano vero; $MZ'N$ il circolo descritto dall' asse ottico a levante del meridiano; MN l' equatore; Z il suo polo vero; l' angolo in $M = i$; S' un astro di declinazione δ, che prima attraversa il circolo $MS'N$, poscia il meridiano. Sarà $MS = MS' = i \operatorname{sen} \delta$; l' angolo in $Z = \frac{SS'}{\operatorname{sen} ZS} = i \operatorname{tang} \delta$ rappresenterà la quantità di cui deve ruotare la sfera perchè giunga l' astro al meridiano vero. Ora in qualunque circolo orario passi il meridiano per la rotazione della sfera, il circolo $MZ'N$ manterrà rapporto ad esso sempre la stessa posizione, e quindi la quantità $i \operatorname{tang} \delta$ sarà la correzione da aggiungersi al secondo membro dell' equazione (3) dipendentemente da questa inclinazione. Al tempo stesso apparisce, che l' angolo i non influirà dentro le quantità di primo ordine nelle declinazioni, e perciò l' equazione (2) non riceve altre correzioni.

Da tutto ciò risulta, che l' angolo orario vero sarà

$$\theta = \theta' - c + t \cos \theta \operatorname{tang} \delta + s \operatorname{sen} \theta \operatorname{tang} \delta + \frac{k}{\cos \delta} + i \operatorname{tang} \delta \ldots (4)$$

purchè le quantità t, s, k, i siano ridotte in tempo, se sono date in secondi di grado.

L' angolo orario tolto dal tempo dell' osservazione se l' astro è a ponente del meridiano, aggiunto se è a levante, darà l' AR del medesimo.

Generalmente si adopera la macchina parallattica per determinare la posizione di un astro incognito rapporto all' equatore, riferendolo a stelle conosciute situate presso a poco nello stesso parallelo. Si stabilisce allora in un angolo orario particolare, e si osservano le differenze apparenti di declinazione e di AR dell' astro incognito con le stelle vicine; queste per le equazioni (2), (4) sono tanto più prossime alle vere differenze, quanto minore è la differenza di declinazione. Così se la macchina sia presso a poco rettificata, sarà inutile tenere conto dei termini dipendenti da c, t, s, k, i, giacchè questi hanno nel risultamento una influenza minima, e per lo più trascurabile.

IV. *Circolo moltiplicatore. Fig. XI–XII.*

44. La prima idea dei circoli moltiplicatori si deve al celebre Mayer, il quale per attenuare gli errori delle divisioni meccaniche di un circolo immaginò, e lasciò descritto nelle sue opere postume l'artificio delle moltiplicazioni. Il primo però a farli eseguire, e ad applicarli alle osservazioni nautiche, che si fanno con piccoli stromenti, e con l'ajuto della riflessione fu il sig. Borda, da cui presero il nome di *circoli di Borda*. Diversi artefici francesi applicarono lo stesso artificio agli stromenti per le grandi operazioni geodetiche, e già i circoli di *Lenoir* erano fra le mani di tutti, e godevano di una giusta riputazione, quando il sig. cav. Reichenbach di Monaco richiamò l'attenzione dei dotti per la grande squisitezza che seppe introdurre nelle divisioni, e per la perfezione con cui erano lavorate le parti tutte delle macchine in copia fornite dalla sua celebre officina ai principali instituti astronomici e geografici, fissando l'epoca dell'odierno perfezionamento dell'Astronomia e Geografia. Una minuta descrizione dei suoi circoli, e dei successivi miglioramenti da esso introdottivi di troppo eccederebbe i limiti che ci siamo prefissi; perciò il più brevemente che sia possibile accenneremo i fondamenti, dai quali dipende la loro costruzione, ed il modo di osservare, prendendo a norma quello qui esistente di un piede di diametro.

45. Lo scopo di questa macchina è di misurare la distanza angolare di due oggetti, ed anche la loro distanza dal zenit con moltiplici osservazioni. La *fig. XI.* rappresenta la macchina veduta di fronte; e la *fig. XII.* la rappresenta in disparte un poco inclinata, perchè si possano vedere i suoi pezzi di dietro.

Essa è composta di un circolo intero esattamente diviso di cinque in cinque minuti con quattro squisitissimi nonii situati alla distanza di 90° l'uno dall'altro, che danno quattro secondi, e col loro mezzo si possono stimare due secondi. Le divisioni sono scolpite in argento; due microscopii portati da un braccio girevole intorno al centro si portano sopra i nonii, i quali sono accompagnati da una carta lucida distesa in un piccolo telajo di ottone, che spande sopra essi una luce equabile per agevolarne la lettura. I nonii sono portati da un circolo concentrico al precedente con esso tornito in un lungo asse che attraversa tutto il gruppo della macchina. Reso quest'asse orizzontale con un livello simile a quello della *fig. VI*, il piano del circolo riesce verticale.

Nel lembo superiore del circolo diviso scorre intorno al suo centro un cannocchiale acromatico, il cui asse ottico è indicato dall'intersezione di due fili sottilissimi, uno dei quali è paralello, l'altro perpendicolare al suo piano. Il cannocchiale è adattato a due sostegni fissi nel circolo interno dei nonii.

Un simile cannocchiale può scorrere lungo il lembo inferiore, e fissarsi sopra di esso in qualunque data posizione con una vite di pressione. È a questo cannocchiale sovrapposto un livello a bolla d'aria squisitissimo per poterne al bisogno rendere l'asse ottico orizzontale. Tutta la macchina può inclinarsi girando intorno ad un asse orizzontale, come vedesi nella *fig. XII.*; stabilita che sia in una particolare posizione può volgersi intorno ad un asse perpendicolare al piano dei due circoli, seco portando i cannocchiali fissi nei lembi. È essa montata sopra un piede di ottone sostenuto da tre forti viti, munito di un circolo orizzontale diviso di 15 in 15 minuti, con un nonio che dà 30", ed è girevole intorno ad un asse verticale che passa pel centro dell'ora nominato circolo orizzontale. Combinando questo movimento con quello sopra indicato d'inclinazione, si può il lembo del circolo disporre nel piano di due oggetti qualunque.

Il cannocchiale superiore è munito di un oculare prismatico, il quale rifrangendo i raggi procedenti dall'obbiettivo in una direzione perpendicolare al lembo del circolo, rende comodissime le osservazioni degli oggetti molto elevati al di sopra dell'orizzonte. Si può per le osservazioni notturne illuminare per l'asse, come la macchina parallattica.

Sullo stesso asse, in cui è fissato il circolo dei quattro nonii, vi è pure dall'opposta parte impernato un circolo minore di 2 pol. di raggio diviso di mezzo grado in mezzo grado con un nonio che dà i minuti. Questo circolo serve a facilitare le osservazioni dei piccoli astri, ponendosi col suo mezzo il circolo maggiore in modo che, fissato il cannocchiale in una data divisione, si porti per la rotazione intorno al suo asse in quella distanza che deve avere l'astro dal zenit per essere dentro il campo del cannocchiale, la quale si calcola preventivamente a un di presso. Soprapposto al cubo che sostiene l'asse di rotazione del circolo nonio vi è un piccolo livello perpendicolare al piano del circolo stesso, a cui si fa segnare la posizione orizzontale opportunamente movendone i sostegni, quando col livello pendente uno siasi assicurato che detto asse è orizzontale. Allora senza esplorare ad ogni volta la posizione dell'asse, lo che sarebbe incomodo, se s'inclini la macchina finchè questo livello segni la posizione orizzontale, sarà il piano del circolo verticale.

Prima di procedere all'uso dello stromento, è necessario assicurarsi, che la linea condotta per l'intersezione dei fili dei cannocchiali sia paralella al piano del circolo; lo che si ottiene agevolmente collimando un oggetto terrestre preciso, e lontanissimo tenendo il circolo nel piano verticale colla faccia rivolta prima a ponente, indi a levante, avendo cura che l'oggetto corrisponda esattamente all'intersezione dei fili quando il piano della macchina ha fatto intorno all'asse verti-

cale una mezza rivoluzione esattamente, la quale leggesi sul circoletto orizzontale.

46. Premesse queste nozioni intorno alla costruzione, ed ai diversi movimenti della macchina, passiamo ad esporre come col suo mezzo si possano osservare le distanze angolari moltiplicate per un indeterminato numero, ed a tale oggetto immaginiamo un circolo geometrico coi cannocchiali ridotti ai loro assi condotti per il suo centro.

Sia primieramente proposto di misurare la distanza angolare di due oggetti D, M veduti dal punto C (*fig. XIII.*). S'inclini il piano della macchina disposta col centro in C, facendola girare intorno all'asse verticale, ed all'asse orizzontale, finchè prolungato sembri passare per i proposti oggetti D, M; lo che si riconoscerà facilmente coll'ajuto del cannocchiale superiore, il quale girando intorno al centro deve passare esattamente per l'uno e per l'altro; trovata che sia la posizione del piano, vi si stabilisca con le viti di pressione, che fermano il moto d'inclinazione, ed il moto della rotazione verticale in un modo invariabile. Questa preliminare operazione richiede destrezza e pratica in chi osserva; si può anche calcolare trigonometricamente la posizione dell'indice orizzontale per eludere ogni tentativo, seguendo il metodo che ho esposto nel Volume I. dei *Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova* in una mia Memoria intorno alla latitudine geografica di questo Osservatorio determinata col circolo ripetitore.

Indichiamo per maggiore brevità con la lettera S il cannocchiale superiore situato dalla parte del lembo diviso; con la lettera I il cannocchiale inferiore. Si fissi il cannocchiale S in $0^\circ\ 0'\ 0''$; indi volgasi il circolo intorno all'asse ad esso normale condotto per C (con che non si altera la posizione del piano) finchè l'oggetto M corrisponde all'intersezione dei suoi fili, sicchè il suo asse ottico prenda la direzione SCM. Distacchisi poi il cannocchiale I dal suo posto, e facciasi girare intorno al lembo finchè corrisponda all'oggetto D, prendendo il suo asse ottico la direzione ICD, sicchè l'angolo SCI uguaglierà il cercato. In questo stato di cose, senza alterare minimamente la posizione rispettiva dei due cannocchiali si farà girare tutto il circolo intorno al suo asse C, finchè il cannocchiale I collima l'oggetto M, passando nella posizione $I'CM$; con che S prenderà evidentemente la posizione $S'CH$ tale, che l'angolo HCD sia doppio del cercato. Rimanendo I in M si distaccherà S (fisso in $0^\circ\ 0'\ 0''$), e si ricondurrà sull'oggetto D; l'angolo di cui dovrà girare intorno al centro sarà doppio dell'angolo richiesto; letto pertanto l'arco trascorso, la sua metà darà la distanza angolare DCM.

Rimanendo ora il cannocchiale S fisso in questa posizione, che chiamerò G, si riprincipierà la stessa serie di operazioni; cioè 1.° si farà girare il circolo intorno a C, finchè S collima in M; 2.° si distaccherà

I dal suo posto, conducendolo in *D*: 3.° si farà girare il circolo, finchè *I* giunge in *M*; 4.° si distaccherà *S* dalla divisione *G*; riconducendolo in *D*, l'arco intero trascorso dal principio dell'operazione sarà $= 4DCM$; e però la sua quarta parte ci darà la distanza angolare richiesta. Procedendo allo stesso modo si potrà ottenere l'angolo sestuplo, ottuplo, decuplo, e così di seguito.

Rendesi ora manifesto il grande vantaggio di questa disposizione per attenuare gli errori delle divisioni; imperocchè se una speciale divisione in cui fermasi il cannocchiale contenga un determinato errore, per es. 20″, questo rifondesi per intero nell'angolo osservato, se sia preso semplicemente; ma coll'artificio delle moltiplicazioni tanto minore è la sua influenza, quanto maggiore è il numero delle ripetizioni, per cui dividesi il totale arco trascorso.

47. Sia in secondo luogo proposto di misurare col circolo la distanza di un oggetto *A* dal zenit *Z* (*fig. XIV.*). Dovrassi allora procedere nel modo seguente: Si disporrà la macchina col mezzo delle viti del piede in modo che la colonna attorno alla quale ruota sia verticale, ed il piano del circolo si renderà pure verticale, con che vi si manterrà costantemente qualunque posizione prenda intorno alla colonna verticale del piede. Posto ciò, si fisserà in 0° 0′ 0″ il cannocchiale superiore, e si girerà il piano del circolo verticale in modo che passi per l'oggetto *A*, avendo il suo lembo rivolto a levante. Ciò fatto, si farà girare intorno al centro tutto lo stromento senza muovere *S*, finchè l'oggetto *A* corrisponda all'intersezione dei fili, ed ivi si fermerà, avendo cura di orizzontare il livello soprapposto all'altro cannocchiale. Si rivolgerà in seguito il piano del circolo a ponente, facendogli fare una mezza rivoluzione esatta intorno all'asse *CZ* dell'orizzonte; in tal guisa ritornerà sul piano dell'oggetto *A*, ed il cannocchiale *S* prenderà la direzione *S′CD* tale, che $DCZ = ZCA$. Il livello soprapposto ad *I* assicurerà che in questo movimento non si è allontanato dall'asse dell'orizzonte; che se vi si scuoprisse una qualche deviazione, si dovrebbe questa correggere facendo ruotare tutto il circolo intorno al suo asse, giacchè si suppone la colonna del piede, ed il piede stesso abbastanza solido per non soffrire alterazione nelle successive rivoluzioni. Sarebbe bene che un apposito livello annesso alla colonna (come vedesi essere stato in altri circoli praticato dallo stesso artefice) avvisasse se questa colonna rimane costantemente verticale; nel nostro circolo manca questo perfezionamento. Allora è palese, che ricondotto il cannocchiale *S* sull'oggetto, l'indice si distaccherà dalla divisione 0° per un arco doppio della distanza cercata. Ripetendo la stessa operazione si potrà a piacere determinare la distanza *ZAC* mediante un arco quadruplo, sestuplo, e così di seguito.

48. *Scolio*. Questi precetti facilmente si applicano alla osservazione

degli oggetti terrestri, i quali si mantengono fissi. Nella osservazione però degli oggetti celesti che per il moto diurno, ed anche per il loro proprio moto variano di posizione da un istante all' altro, conviene unirvi eziandio l' osservazione del tempo per ridurre tutto ad un' epoca fissa e determinata. In allora non manca di qualche complicazione l' uso degli stromenti moltiplicatori, che richiedono in questo caso una grande circospezione. I precetti che si devono seguire, e le riduzioni da applicarsi alle osservazioni trovansi esposte in molte opere, che sono fra le mani di tutti, con numerosi esempi che ne facilitano l' intelligenza alla studiosa gioventù; perciò brevemente nelle cose seguenti esporremo i metodi da praticarsi nella riduzione delle osservazioni, rimandando per gli esempi, e per una più ampia esposizione alle opere che qui citiamo: De-Lambre, *Methodes analytiques, Paris an. VII.* Biot, *Traité d' astronomie, Paris ec.* 1810. *Effemeridi di Milano* 1809–1811. Puissant, *Methode general pour obtenir le risultat moyen etc. Paris* 1823.; ed altre molte.

49. Adoperasi il circolo moltiplicatore in Astronomia nelle tre circostanze seguenti: 1.° per osservare la distanza di un astro dal zenit quando trovasi nel meridiano; 2.° per osservarne la distanza dal zenit quando è molto distante dal meridiano; 3.° per osservare la distanza di un astro da un oggetto terrestre. Nei primi due casi tiensi il circolo in un piano verticale condotto per l' astro, a cui si collima col cannocchiale, colla faccia alternativamente rivolta a levante ed a ponente, e notasi in un orologio di moto regolare il tempo corrispondente ad ogni collimazione. È palese, che in questi due casi l' arco trascorso dal nonio attorno il circolo è la somma delle distanze variabili dell' astro dal zenit. Ciò posto, vogliasi 1.° determinare la distanza meridiana dell' astro dal zenit. Si comincierà la ripetizione delle distanze variabili alcuni minuti prima del passaggio pel meridiano, e si continuerà per alcuni minuti dopo, e togliendo i tempi delle osservate collimazioni dal passaggio per il meridiano, si formeranno gli angoli orarii ad esse corrispondenti in gradi, che fingeremo essere $= P', P'', P''' \dots P^{(n)}$. Sia Z la cercata distanza meridiana; $Z + r$ la distanza dal zenit in una collimazione qualunque corrispondente all' angolo orario P; δ la declinazione dell' astro; L la latitudine del luogo. Nel triangolo sferico ZPS' (*fig. VII.*) (in cui Z sia il zenit, P il polo, S' l' astro collimato) avremo $ZP = 90° - L$, $PS' = 90° - \delta$, $ZS' = Z + r$, $ZS = L - \delta = Z$; quindi da esso si otterrà

$$\cos(Z + r) = \text{sen}\, L \,\text{sen}\, \delta + \cos L \cos \delta \cos P;$$

ovvero

$$\cos(Z + r) = \cos(L - \delta) - 2 \cos L \cos \delta \,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} P;$$

la quale equazione può scriversi nel modo seguente

$$\frac{\cos Z - \cos(Z + r)}{\text{sen}\, Z} = \frac{2 \cos L \cos \delta}{\text{sen}(L - \delta)} \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} P.$$

Sotto questo aspetto l'equazione (4) (§ III. Trig.) darà tosto

$$r=\frac{\cos L\cos\delta}{\text{sen}\,Z}\cdot\frac{2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}P}{\text{sen}\,1''}-\tfrac{1}{2}(\cot Z)\left(\frac{\cos L\cos\delta}{\text{sen}\,Z}\right)^2\left(\frac{2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}P}{\text{sen}\,1''}\right)^2+\text{ec.}(a)$$

dove i termini del secondo membro dividonsi per sen 1″ ad oggetto di ridurli a secondi di grado. Questa serie è convergentissima a motivo della piccolezza di P, e quando questo non ecceda 16′ di tempo il solo suo primo termine darà r con bastante precisione.

I coefficienti $\frac{\cos L\cos\delta}{\text{sen}\,Z}$, $\tfrac{1}{2}(\cot Z)\left(\frac{\cos L\cos\delta}{\text{sen}\,Z}\right)^2$ sono costanti per una stessa stella, e si potranno rappresentare per A, B; i valori dipendenti da P trovansi ridotti in tavole in varie opere, con che moltissimo è facilitato il calcolo della riduzione r per ogni collimazione.

Siano ora r', r'', r'''... le riduzioni calcolate per gli angoli orarii P', P'', P'''...; n il numero delle osservazioni; A l'arco totale letto nel circolo dopo l'ultima collimazione; sarà

$$A=(Z+r')+(Z+r'')+(Z+r''')\ldots=nZ+(r'+r''+r'''\ldots).$$

Quindi la cercata distanza sarà $Z=\frac{A}{n}-\frac{r'+r''+r'''}{n}\ldots(b)$

ove è da osservarsi che nei passaggi inferiori si dovrà prendere il medio delle riduzioni col segno $+$.

Se l'astro ha un moto proprio in declinazione, in virtù di cui in un minuto si avvicini al polo boreale di m'', se ne terrà conto, aggiungendo al risultamento precedente la correzione... $+\frac{m''\,\Sigma.P'}{n}$, intendendo per $\Sigma.P'$ la somma degli angoli orarii ridotta in minuti di tempo, e presa in modo che gli angoli dopo il meridiano essendo positivi, quelli avanti il meridiano sieno negativi.

La distanza Z così ottenuta dovrà poi correggersi dalla rifrazione, ove è da osservarsi che se l'astro è molto vicino all'orizzonte converrà eziandio tener conto della sua variazione nelle diverse collimazioni.

50. Sia in secondo luogo proposto di ridurre ad un'epoca determinata la somma delle distanze dal zenit di un astro molto distante dal meridiano, e per facilità prendiamo per epoca il medio aritmetico dei tempi osservati nelle singole collimazioni. Sia t un tal medio, a cui corrisponda l'angolo orario P; z la cercata distanza dal zenit; presa la differenza fra il tempo t e gl'istanti delle singole collimazioni, si riduca in arco, e s'indichino i risultamenti per θ', θ'', θ'''... riguardandoli come positivi nelle collimazioni posteriori al tempo t; negativi nelle anteriori; gli angoli orarii delle singole collimazioni saranno $P+\theta'$, $P+\theta''$, $P+\theta'''$...; le distanze corrispondenti dal zenit

siano $z+p'$, $z+p''$, $z+p'''\ldots$; A l'intero arco trascorso; n il numero delle osservazioni. Avremo evidentemente

$$A = nZ + p' + p'' + p''' \ldots; \quad \text{quindi} \quad z = \frac{A}{n} - \frac{\Sigma . p}{n} \quad \ldots \quad (c)$$

indicando per $\Sigma . p$ la somma dei numeri p', p'', p''' ec.

Per trovare una tal somma si consideri in generale una distanza $z+p$ corrispondente all'angolo orario $P+\theta$; il solito triangolo PZS, ritenute le denominazioni precedenti darà l'equazione

$$\cos(z+p) = \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta + \cos L \cos \delta \cos(P+\theta) \quad \ldots \quad (d)$$

dalla quale col mezzo del teorema di Taylor si ottiene

$$z + p = z + \frac{dz}{dP}\theta + \frac{d^2 Z}{dP^2}\tfrac{1}{2}\theta^2 + \text{ec.}$$

dove trascureremo i termini superiori a θ^2, perchè ordinariamente le serie delle osservazioni abbracciano pochi minuti avanti e dopo il termine medio.

Sarà quindi $\Sigma . p = \frac{dz}{dP}\Sigma . \theta + \frac{d^2 z}{dP^2}\Sigma \tfrac{1}{2}\theta^2$.

Si osservi ora che assumendo l'epoca nel mezzo della serie si ha $\Sigma\theta = 0$; d'altra parte in luogo di $\Sigma \tfrac{1}{2}\theta^2$ si potrà scrivere senza errore sensibile $\Sigma . 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta$. Riducendo pertanto la ottenuta correzione a secondi, e sostituendola nell'equazione (c), si otterrà

$$z = \frac{A}{n} - \frac{d^2 z}{n\, dP^2} . \Sigma . \frac{2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta}{\operatorname{sen} 1''} \quad \ldots \quad (c)$$

dove è palese che il termine sotto il segno Σ si calcolerà facilmente mediante le tavole per la riduzione delle osservazioni meridiane. Il coefficiente $\frac{d^2 z}{n\, dP^2}$ si otterrà dall'equazione

$\cos z = \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta + \cos L \cos \delta \cos P$, la quale differenziata rapporto a P darà $\ldots$ $\frac{dz}{dP} = \frac{\cos L \cos \delta \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} z} \quad \ldots \quad (1)$

$$\frac{d^2 z}{dP^2} = \cot P \frac{dz}{dP} - \cot z \left(\frac{dz}{dP}\right)^2 \quad \ldots \quad (2)$$

per il calcolo delle quali in luogo di z si può senza errore sensibile prendere il suo valore prossimo $\frac{A}{n}$ dato dalle osservazioni. Abbiamo supposto la declinazione costante, il qual caso ha luogo nelle stelle fisse; per il Sole e pei pianeti varia lentamente; ma è facile riconoscere che i termini del primo ordine dipendenti da questa variazione si elidono nel caso presente; gli altri, come piccolissimi si possono trascurare.

51. Adoperasi in terzo luogo il circolo per determinare la distanza di un oggetto celeste da un oggetto terrestre, la quale poi progettata

nel piano orizzontale, come si mostrerà nella Geodesia, dà la differenza di azimut. In tal caso s'inclina il circolo nel piano variabile dei due oggetti; l'arco A osservato con n ripetizioni rappresenta la somma delle n distanze corrispondenti ai tempi delle collimazioni; da questo dedurrassi la distanza cercata per l'istante medio della serie nel modo seguente.

Sia D la cercata distanza corrispondente all'angolo orario P; gli angoli orarii delle collimazioni siano $P+\theta'$, $P+\theta''$ ec. essendo θ', θ'' ec. piccole quantità da determinarsi nel modo indicato al § precedente, delle quali trascureremo i termini superiori al quadrato; $D+\delta'$, $D+\delta''$ ec. le distanze corrispondenti agli angoli orarii $P+\theta'$, $P+\theta''$ ec. Si troverà, facendo uso degli stessi ragionamenti

$$D = \frac{A}{n} - \frac{d^2 D}{n\, d P^2} \,.\, \Sigma \,.\, \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}{\operatorname{sen} 1''} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{ʃ})$$

dove il valore della quantità sotto il segno Σ si calcolerà, come sopra, dalla tavola per le riduzioni al meridiano.

Quanto al calcolo di $\frac{d^2 D}{d P^2}$, ecco il metodo che sembrami più spedito. Rappresenti (*Tav. I. fig.* 15) S il luogo del cielo stellato in cui la linea condotta dall'occhio all'oggetto terrestre sembra incontrarlo; Z il zenit, P il polo, S' la posizione dell'astro ad un istante qualunque. Sarà ZS la distanza fissa dell'oggetto dal zenit, PZS il suo azimut stimato dal nord, il quale pure rimane invariabile; si osservino in primo luogo ZS, PZS; una determinazione prossima in gradi e minuti è qui sufficiente. Essendo $PZ = 90° - L$, si risolva il triangolo ZPS, e si otterrà PS con l'angolo ZPS, i quali pure rimangono costanti. Pongasi $ZPS = m$, $PS = 90° - \mu$. Indi si consideri il triangolo SPS', fingendo S' la posizione dell'astro all'istante medio della serie; sarà $SPS' = P - m$, $S'P = 90° - \delta$; $SS' = D$; il detto triangolo darà

$$\cos D = \operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\delta + \cos\mu \cos\delta \cos(P-m),$$

la quale differenziata due volte rapporto a P porgerà

$$\frac{dD}{dP} = \frac{\cos\mu \cos\delta \operatorname{sen}(P-m)}{\operatorname{sen} D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{d^2 D}{d P^2} = \cot(P-m)\frac{dD}{dP} - \cot D \left(\frac{dD}{dP}\right)^2 \quad . \quad (2)$$

nei secondi membri delle quali si potrà in luogo di D scrivere il suo valore prossimo $\frac{A}{n}$. Ottenuto così $\frac{d^2 D}{d P^2}$, facilmente si otterrà dalla formula superiore la distanza D per l'istante medio della serie. Qui pure è palese, che posta anche variabile la declinazione, i termini del

primo ordine si elidono, e perciò sempre si otterrà con una conveniente esattezza il valore di D dietro gli esposti precetti.

V. *Del Teodolite*.

52. Accade spesse volte, soprattutto nelle osservazioni geodesiche dirette alla formazione di una mappa, od alla misura di un grado del meridiano, che non si desideri l'angolo compreso fra due oggetti veduti da un determinato luogo, ma la projezione di un tale angolo nell'orizzonte, o vogliasi dire l'angolo formato dalle intersezioni di due piani verticali condotti dal luogo dell'osservazione per i due oggetti col piano orizzontale, il quale costituisce la differenza dei loro azimut. Si può in vero ottenere una tale differenza dietro un calcolo trigonometrico molto semplice eziandio dall'angolo osservato col circolo disposto nel piano degli oggetti, come più particolarmente mostreremo nel secondo volume; ma direttamente, e senza alcuna riduzione si ottiene da un buon teodolite moltiplicatore, il quale in virtù della sua costruzione è destinato ad osservare gli angoli orizzontali. Sotto varie forme si costruiscono al presente i teodoliti, ai quali il genio di Reichenbach ha fatto molte utili ed importanti correzioni; noi però descriveremo brevemente la forma più comune rappresentata nella *fig. XV.*, che è appunto quella del teodolite dall'abile nostro meccanico Stefani costruito per uso dell'Osservatorio di Padova. Consta di un circolo orizzontale di un piede di diametro, diviso di 10′ in 10′; questo è tornito con una colonna B attraversante il gruppo del tripode di ottone che sostiene la macchina, ed ha il suo centro di moto in C. Un circolo concentrico al precedente porta due nonii distanti per 180°, i quali danno 10″. Due opposte colonnette piramidali di uguale altezza fisse nel circolo dei nonii sostengono un asse orizzontale, perpendicolare al piano del semicircolo FF, diviso in minuti mediante un nonio a. Questo semicircolo ruota sugli appoggi descrivendo un piano verticale, che passa pel centro del maggiore circolo AA; si può fermare con una vite di pressione q in ogni altezza fino verso 60°, e con un micrometro r far variare per piccole quantità l'altezza medesima. Sul diametro superiore di questo semicircolo è fermato un cannocchiale PQ, con un livello ad esso sottoposto in modo che i loro assi siano paralelli.

Una vite di pressione G ferma il circolo del nonio, e quindi anche il semicircolo FF in qualunque punto del circolo orizzontale AA, ed un micrometro A procura i piccoli movimenti orizzontali.

Un cannocchiale $P'Q'$ può scorrere orizzontalmente intorno alla colonna B, ed elevarsi per qualche grado sopra un piano orizzontale lungo un piano verticale; può anche con una vite di pressione fissarsi alla colonna stessa B in modo che con essa si avvolga intorno ad un asse verticale. La stessa colonna mediante una vite di pressione m,

che agisce in un braccio fisso nel piede, può rendersi stabile, e con un micrometro volgersi lentamente intorno al suo asse.

Con un livello pendente, che si fa passare fra i vacui delle colonnette piramidali, rendesi l'asse del semicircolo FF orizzontale in tutte le posizioni mediante le viti del piede; in tal guisa l'asse della colonna B, ed il piano del semicircolo FF divengono verticali, il piano del circolo AA rendesi orizzontale.

Quando sia stato col livello pendente reso orizzontale il circolo AA, si abbassa il cannocchiale PQ finchè il suo asse ottico sia orizzontale collimando un qualche punto terrestre che sia stato preso in una direzione orizzontale esattamente col centro dell'obbiettivo. Allora il nonio del semicircolo verticale deve indicare 0° 0′ 0″; in caso diverso la divisione in cui trovasi costituisce il principio di partenza, e nota l'errore del principio di numerazione. In questa posizione si renderà l'asse del livello unito al cannocchiale perfettamente orizzontale col mezzo di una vite posta in una sua estremità. Così si potrà sempre facilmente orizzontare la macchina senza l'ajuto del livello pendente.

53. Rendesi ora chiaro che per molti usi geodesici ed astronomici potrà adoprarsi il teodolite: 1.° orizzontato che sia si rileveranno con esso in gradi e minuti le altezze degli oggetti terrestri, ed anco del Sole e delle stelle; potrà quindi servire a determinare per l'uso comune il tempo vero e l'errore di un orologio; 2.° si potrà adoperare per una estesa livellazione; 3.° con precisione darà la differenza di azimut di due oggetti, che nomineremo D, S, al che si procederà nel modo seguente: si collocheranno i nonii del circolo AA in 0° 0′ 0″, ed in questa posizione si chiuderà la vite di pressione G. Aperta la vite di pressione m, si volgerà intorno alla colonna verticale B tutta la macchina, finchè vedasi che il piano verticale FF passa per l'oggetto D; allora si abbasserà il cannocchiale PQ verso il medesimo, e chiusa la vite m, col mezzo del micrometro ad essa contiguo e del micrometro r si condurrà l'oggetto D nell'intersezione dei fili. Aperta la vite G, si condurrà il piano FF sull'oggetto S, al quale si dirigerà il cannocchiale; l'arco che il nonio avrà trascorso nel circolo AA rappresenta l'angolo orizzontale compreso fra i due oggetti. Chiusa la vite G, ed aperta la vite m, si riconduca di nuovo in D il cannocchiale PQ; ivi chiusa la vite m, aprasi la vite G, e si faccia passare PQ in S; è palese che l'arco intero trascorso dal nonio sarà il doppio dell'angolo cercato. Così procedendo si potrà ottenere il triplo, il quadruplo, il quintuplo ec. dello stesso angolo. Suppone questa operazione che la vite m sia abbastanza sicura per non permettere alla macchina il minimo movimento intorno alla colonna B, mentre il cannocchiale PQ passa dall'oggetto D all'oggetto S. Se ciò abbia

realmente luogo, riconoscesi col mezzo del cannocchiale $P'Q'$, il quale dirigesi ad un oggetto terrestre qualunque prima di muovere la vite G; condotto poi QP in S, si osserverà se siasi allontanato $P'Q'$ dal collimato oggetto, e se scuopresi un qualche errore si correggerà mediante la vite micrometrica m. Se operisi con diligenza, si perverrà sempre in tal guisa a determinare la differenza di azimut con molta precisione.

54. Se uno degli oggetti collimati, per es. S, sia il Sole od una stella qualunque, conviene allora tener conto del tempo, e ridurre la differenza variabile di azimut ad un istante dato, per il quale sceglìesi d'ordinario il mezzo dei tempi osservati in ogni cambiamento del cannocchiale.

Per ottenere una tale riduzione, sia P l'angolo orario corrispondente al mezzo della serie; gli angoli orarii corrispondenti alle singole collimazioni siano $P+\theta'$, $P+\theta''$... Rappresentando con ζ l'angolo PZS, che fingeremo essere l'azimut dell'astro nel mezzo della serie contato dal nord, siano $\zeta+\alpha'$, $\zeta+\alpha''$... gli azimut ai tempi delle collimazioni; l'azimut dell'oggetto sia G, l'arco totale percorso con n ripetizioni nel teodolite sia A; sarà $A = n\zeta - nG + \Sigma\alpha$; e perciò

$$\zeta - G = \frac{A}{n} - \Sigma \cdot \frac{\alpha}{n} \quad . \; . \; . \; . \quad (e)$$

Il triangolo PZS, posto come sopra $PZ = 90° - L$, $ZPS = P + \theta$, $PS = 90 - \delta$, $PZS = \zeta + \alpha$ darà (Trig. XIII. (5))

$$\cot(\zeta + \alpha) = \frac{\operatorname{tang}\delta \cos L - \operatorname{sen} L \cos(P+\theta)}{\operatorname{sen}(P+\theta)} \quad . \; . \quad (1)$$

e per l'angolo orario P si avrà del pari

$$\cot\zeta = \frac{\operatorname{tang}\delta \cos L - \operatorname{sen} L \cos P}{\operatorname{sen} P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Se ora la equazione (1) si sviluppa secondo il teorema di Taylor, indi prendesi la somma dei valori di α, si otterrà per l'istante medio della serie con ragionamenti simili ai precedenti

$$\Sigma\alpha = \frac{d^2\zeta}{dP^2} \cdot \Sigma \cdot \frac{2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta}{\operatorname{sen} 1''} \quad . \; . \; . \quad (f)$$

Per ottenere $\frac{d^2\zeta}{dP^2}$ si calcolerà primieramente ζ dall'equazione (2), o più comodamente dietro i precetti del § 20; indi il calcolo successivo delle segnenti equazioni che tosto deduconsi differenziando logaritmicamente l'equazione (2) ne darà il suo valore numerico

$$\frac{d\zeta}{dP} = \tfrac{1}{2}\cot P \operatorname{sen} 2\zeta - \operatorname{sen} L \operatorname{sen}^2\zeta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dP^2} = -\tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2\zeta}{\operatorname{sen}^2 P} - \cot P \frac{d\zeta}{dP} + 2\cot\zeta \left(\frac{d\zeta}{dP}\right)^2 \quad . \; . \quad (3)$$

CAPITOLO III.

Dei diversi metodi per determinare la latitudine geografica, e l'angolo orario col mezzo di osservazioni di stelle fatte fuori del meridiano.

55. Accade spesse volte che l'osservatore non possa fare le osservazioni degli astri nel meridiano per poter determinare la latitudine del luogo ove egli si trova, o perchè non è abbastanza ben conosciuta la posizione del meridiano stesso, o perchè non ha tempo bastante a stabilire una serie di osservazioni. Noi lo supporremo pertanto provveduto di uno stromento atto a misurare le altezze degli astri, e di un orologio astronomico, il cui moto sia regolare. Esporremo i seguenti metodi, fra i quali sceglierà l'osservatore nei diversi casi particolari quello che le circostanze gli renderanno il più comodo.

Metodo I. Con due altezze d'una stessa stella prese a diversi intervalli di tempo.

56. (*Fig.* 14) Sia un qualunque astro dopo il suo passaggio pel meridiano osservato in due diversi istanti di tempo in S ed in S', e per l'osservazione conoscansi le distanze dal zenit ZS, ZS'. Sia P il polo dell'equatore; le distanze PS, PS' sono fra di loro uguali, essendo il complemento della declinazione. L'angolo SPS' è misurato dalla differenza dei tempi scorsi fra le due osservazioni; condotto pertanto l'arco di circolo massimo SS', pongasi

$ZS = h$, $ZS' = h'$, $ZP = 90 - L = \varphi$, $PS = \delta$,
$SPS' = \theta$, $ZPS = \lambda$, $ZPS' = \lambda + \theta$,
$SS' = x$, $PSS' = y$, $ZSS' = z$; sarà $ZSP = z - y$.

Il triangolo isoscele PSS' dà . . $\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \theta$ . . . (1)

$$\cos y = \cot \delta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x, \text{ ovvero } \operatorname{tang} y = \frac{\cot \tfrac{1}{2} \theta}{\cos \delta} \;.\;.\;.\; (2)$$

Trovati i valori di y e di x, dal triangolo ZSS' avremo

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(h' + h - x) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(h' - h + x)}{\operatorname{sen} h \operatorname{sen} x}} \;.\;.\;.\; (3)$$

Ora essendosi calcolati gli angoli z ed y si avrà nel triangolo ZSP l'angolo $ZSP = z - y$, $ZS = h$, $PS = \delta$; quindi per le formule esposte nella Trigonometria (§ XV, caso III) si otterranno l'angolo $ZPS = \lambda$, e $ZP = \varphi$ colle formule seguenti

$$\operatorname{tang} G = \cos(z - y) \operatorname{tang} h \;.\;.\;.\; (4)$$

$$\cot \lambda = \frac{\cot(z - y) \operatorname{sen}(\delta - G)}{\operatorname{sen} G} \; (5); \quad \cot \varphi = \operatorname{tang} L = \cos \lambda \cot(\delta - G) \; (6)$$

Mediante il calcolo delle formule (1), (2), (3), (4), (5), (6) si otterrà sempre con molta facilità l'angolo λ (che ridotto in tempo, ed aggiunto all'*AR* della stella, darà il vero tempo sidereo della prima osservazione, e quindi dal confronto del tempo calcolato con l'osservato si avrà l'errore del pendolo), e la latitudine geografica *L*.

Scolio. Quantunque questo processo sia molto semplice e spedito, tuttavia è forse talora più comodo il metodo di falsa posizione immaginato dal signor Douwes, che ci faremo ora ad esporre. Ritenendo le superiori denominazioni, dai triangoli *ZPS*, *ZPS'* avremo

$$\cos h = \cos \delta \cos \varphi + \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi \cos \lambda \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\cos h' = \cos \delta \cos \varphi + \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi \cos (\lambda + \theta) \quad . \quad . \quad (2)$$

Sottratta la seconda dalla prima avremo

$$\cos h - \cos h' = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi [\cos \lambda - \cos (\lambda + \theta)],$$

la quale si può scrivere sotto la forma seguente

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (h' - h) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (h' + h) = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \theta \operatorname{sen} (\lambda + \tfrac{1}{2} \theta).$$

Quindi si deduce

$$\operatorname{sen} (\lambda + \tfrac{1}{2} \theta) = \frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (h' - h) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (h' + h)}{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \theta} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \quad . \quad . \quad (3)$$

L'equazione (1) si può ancora scrivere sotto la forma

$$\cos (\delta - \varphi) = \cos h + 2 \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dando ora a φ un valore prossimo al vero, si otterrà dall'equazione (3) un valore di λ, che scritto nell'equazione (4) darà il valore di $\delta - \varphi$, e quindi quello di φ. Se il valore di φ ritrovato così dall'equazione (4) coincide con quello già assunto, saranno λ e φ determinati a dovere. In caso diverso si sostituirà per φ nell'equazione (3) questo valore ultimamente trovato per ottenere un valore di λ più vicino al vero, col mezzo del quale troveremo un valore più esatto di $\delta - \varphi$, e quindi anche di φ. Così con pochi tentativi si giungerà facilmente a determinare il vero valore di λ e di φ. Questo metodo è molto spedito, massime quando un'osservazione sia fatta in vicinanza del meridiano, poichè essendo allora λ di pochi gradi, un errore in φ ha una piccola influenza nel secondo membro dell'equazione (4).

Metodo II. Colle altezze osservate di due stelle note, e col tempo intercetto fra le due osservazioni.

57. Questo metodo non è quasi più difficile del precedente, quantunque il calcolo numerico sia un poco più laborioso. Sia (*Fig.* 15) come sopra *Z* il zenit, *P* il polo, *S* la posizione di una stella nella prima osservazione, e nello stesso tempo immaginiamoci, che la seconda stella fosse in *f*, mentre nella seconda osservazione siasi trasportata in *S'*. È manifesto che l'angolo *fPS* rappresenta la differenza delle *AR* dei due astri, ed *fPS'* la quantità, di cui la sfera celeste ha ruotato fra la prima e seconda osservazione, ossia è = alla differenza dei tempi

osservati ridotta in gradi. Quindi SPS' = diff. di $AR \pm$ diff. dei tempi osservati $= \theta$, valendo il segno $+$ se il primo astro osservato è all'oriente del secondo, — nel caso contrario. Pongasi inoltre $ZPS = \lambda$, $ZS = h$, $ZS' = h'$, $PS = \delta$, $PS' = \delta'$, $ZP = \varphi$. Saranno date le quantità θ, h, h', δ, δ', ed incognite φ, λ.

Condotto l'arco di circolo massimo SS', risolveremo il triangolo PSS', in cui sono dati PS, PS', e l'angolo compreso $SPS' = \theta$.

Determineremo mediante il medesimo l'angolo $PSS' = y$, il lato $SS' = x$. Quindi dal triangolo ZSS', conosciuti i tre lati h, h', x, dedurremo l'angolo $ZSS' = z$. Per ultimo dal triangolo ZSP, in cui l'angolo $ZSP = y - z$, $ZS = h$, $PS = \delta$, dedurremo l'angolo $ZPS = \lambda$, il lato $ZP = \varphi = 90 - L$, rappresentando L la cercata latitudine.

Simili conseguenze si dedurranno dal triangolo $ZS'P$, qualora siansi eziandio calcolati gli angoli $ZS'S = z'$, $PS'S = y'$.

Ecco le formule che conviene calcolare per la successiva risoluzione di questi triangoli, le quali tosto deduconsi dal § XV della Trigonometria, riducendo al nostro caso le denominazioni ivi adoperate.

1. Sistema rapporto al triang. ZSP — 2. Sistema rapporto al triang. $ZS'P$

(1) $\operatorname{tang} F = \cos\theta \operatorname{tang} \delta'$; $\operatorname{tang} F' = \cos\theta \operatorname{tang} \delta$

(2) $\operatorname{tang} y = \dfrac{\operatorname{tang}\theta \operatorname{sen} F}{\operatorname{sen}(\delta - F)}$; $\operatorname{tang} y' = \dfrac{\operatorname{tang}\theta \operatorname{sen} F'}{\operatorname{sen}(\delta' - F')}$

(3) $\cot x = \cos y \cot(\delta - F)$; $\cot x = \cos y' \cot(\delta' - F')$

Facendo poi $h + h' + x = 2p$, si avrà

(4) $\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}z = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(p-h)\operatorname{sen}(p-x)}{\operatorname{sen} h \operatorname{sen} x}}$; $\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}z' = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(p-h')\operatorname{sen}(p-x)}{\operatorname{sen} h' \operatorname{sen} x}}$

(5) $\operatorname{tang} G = \cos(z - y) \operatorname{tang} h$; $\operatorname{tang} G' = \cos(y' - z') \operatorname{tang} h'$

(6) $\operatorname{tang}\lambda = \dfrac{\operatorname{sen} G \operatorname{tang}(z - y)}{\operatorname{sen}(\delta - G)}$; $\operatorname{tang}(\lambda + \theta) = \dfrac{\operatorname{tang}(y' - z') \operatorname{sen} G'}{\operatorname{sen}(\delta' - G')}$

(7) $\cot\varphi = \operatorname{tang} L = \cos\lambda \cot(\delta - G) = \cos(\lambda + \theta) \cot(\delta' - G')$.

Determinato l'angolo λ, si aggiungerà all'AR del primo astro, se ha passato il meridiano, o si toglierà se non vi è ancor pervenuto; si otterrà così l'AR di quel punto dell'equatore che sta sul meridiano, ossia (come gli astronomi l'appellano) l'AR del mezzo del cielo, che ridotta in tempo porgerà il tempo sidereo. Questo poi confrontato con quello dell'orologio darà l'errore del medesimo.

Scolio. Le formule di Nepero somministrano una soluzione del problema molto comoda, ed eziandio la più spedita, qualora a riscontro del calcolo vogliansi risolvere tutti i triangoli PSS', ZSS', $ZS'P$, ZSP. Siccome ognuno potrà prepararsi con facilità le formule opportune, tralascieremo di qui riferirle, e passeremo piuttosto ad esporre

un terzo metodo, che primo il signor dott. Gauss ha messo in opera per la ricerca delle latitudini geografiche.

Metodo III. Col mezzo di tre stelle, che in successivi tempi pervengono ad una medesima altezza incognita, trovare l' errore dell' orologio e l' altezza del polo, osservate avendo le differenze dei tempi, nei quali gli astri pervengono a questa altezza comune.

58. Chiamando h la distanza comune delle tre stelle dal zenit; λ, $\lambda - \theta$, $\lambda - \theta'$ i tre angoli orarii al tempo delle tre osservazioni; δ, δ', δ'' le distanze delle stelle dal polo; φ la distanza del polo dal zenit, avremo fra le incognite h, φ, λ le tre seguenti equazioni, nelle quali θ, θ' sono date per le differenze delle AR, e dei tempi osservati, come tosto mostreremo.

$$\cos h = \cos\varphi \cos\delta + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta \cos\lambda$$
$$\cos h = \cos\varphi \cos\delta' + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta' \cos(\lambda - \theta)$$
$$\cos h = \cos\varphi \cos\delta'' + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta'' \cos(\lambda - \theta')$$

Sottratta ora la prima dalla seconda facilmente vedremo potersi il residuo scrivere nel modo seguente:

$$\cos\varphi(\cos\delta' - \cos\delta) = \left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\varphi[\cos\lambda - \cos(\lambda - \theta)]\,[\operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\delta'] \\ + \operatorname{sen}\varphi[\cos\lambda + \cos(\lambda - \theta)]\,[\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\delta'] \end{array}\right\} : 2$$

la quale cangiasi nella seguente (dividendo per sen φ)

$$\cot\varphi \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') = -\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta \operatorname{sen}(\lambda - \tfrac{1}{2}\theta)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')$$
$$+ \cos\tfrac{1}{2}\theta\cos(\lambda - \tfrac{1}{2}\theta)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')$$

Ponendo ora $A\cos B = \cos\tfrac{1}{2}\theta \cot\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')$; $A\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\cot\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')$, essa cangiasi nella seguente $\cot\varphi = A\cos(\lambda - \tfrac{1}{2}\theta + B) = A\cos(\lambda - C)$, ove $C = \tfrac{1}{2}\theta - B$.

Similmente sottraendo la prima dalla terza, e ponendo $A'\cos B' = \cos\tfrac{1}{2}\theta'\cot\tfrac{1}{2}(\delta + \delta'')$; $A'\operatorname{sen} B' = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta'\cot\tfrac{1}{2}(\delta - \delta'')$; $C' = \tfrac{1}{2}\theta' - B'$, si otterrà $\cot\varphi = A'\cos(\lambda - C')$.

Confrontando i due valori di cot φ, si otterrà per determinare λ la seguente equazione $A\cos(\lambda - C) = A'\cos(\lambda - C')$. Per ottenere da questa il valore di λ, si aggiunga e si sottragga una quantità indeterminata h all' arco λ. Fatti gli sviluppi dei coseni, e divisa l' equazione risultante per $\cos(\lambda - h)$, si ottiene

$$\operatorname{tang}(\lambda - h) = \frac{A\cos(h - C) - A'\cos(h - C')}{A\operatorname{sen}(h - C) - A'\operatorname{sen}(h - C')}.$$

Essendo h indeterminato si ottengono delle comode soluzioni ponendo $h = C$, ovvero $h = C'$. Comodissima poi è la soluzione, che ci presenta il valore di $h = \tfrac{1}{2}(C + C')$, nel qual caso la precedente equazione diviene $\operatorname{tang}[\lambda - \tfrac{1}{2}(C + C')] = \frac{A - A'}{A + A'}\cot\tfrac{1}{2}(C' - C)$. Ponendo ora $\frac{A'}{A} = \operatorname{tang}\zeta$, lo che dà $\frac{A - A'}{A + A'} = \operatorname{tang}(45 - \zeta)$, ed in seguito

$\tang \psi = \tang (45 - \zeta) \cot \frac{1}{2}(C' - C)$, avremo $\lambda = \psi + \frac{1}{2}(C' + C)$.

Ecco pertanto la serie delle formule che seguire si devono per il calcolo delle incognite λ, ϕ con questo metodo.

In primo luogo convien determinare le quantità $-\theta$, $-\theta'$, che entrano nelle formule precedenti. Supponiamo perciò che α, α', α'' rappresentino le AR delle tre stelle; t, t', t'' siano i tempi indicati dall'orologio ridotti in gradi pel tempo delle tre osservazioni; k rappresenti l'errore dell'orologio, cosicchè i veri tempi siderei in gradi siano rappresentati da $t + k$, $t' + k$, $t'' + k$. Gli angoli orarii (valutati dopo il passaggio degli astri per il meridiano da $0°$ fino a $360°$) saranno $t + k - \alpha$, $t' + k - \alpha'$, $t'' + k - \alpha''$; e quindi avremo $\lambda = t + k - \alpha$; $\lambda - \theta = t' + k - \alpha'$; $\lambda - \theta' = t'' + k - \alpha''$; donde dedurremo $-\theta = t' - t - (\alpha' - \alpha)$; $-\theta' = t'' - t - (\alpha'' - \alpha)$.

Determinati così i valori di θ, θ', calcoleremo numericamente le seguenti formule

(1) $A \sen B = \sen \frac{1}{2}\theta \cot \frac{1}{2}(\delta - \delta')$; (2) $A \cos B = \cos \frac{1}{2}\theta \cot \frac{1}{2}(\delta + \delta')$

(3) $A' \sen B' = \sen \frac{1}{2}\theta' \cot \frac{1}{2}(\delta - \delta'')$; (4) $A' \cos B' = \cos \frac{1}{2}\theta' \cot \frac{1}{2}(\delta + \delta'')$

dalle quali si determineranno i valori A, B, A', B' osservando di prendere B, B' in quadranti tali, che A, A' divengano quantità positive. Pongasi in seguito $C = \frac{1}{2}\theta - B$, $C' = \frac{1}{2}\theta' - B'$,

$$(5)\ \tang \zeta = \frac{A'}{A};\quad (6)\ \tang \psi = \tang (45 - \zeta) \cot \frac{1}{2}(C' - C).$$

Sarà $\lambda = \psi + \frac{1}{2}(C + C')$; e per ultimo

(7) $\cot \phi = \tang L = A \cos (\lambda - C) = A' \cos (\lambda - C')$.

Questo terzo metodo è in ciò pregevole, che rendesi indipendente dalle rifrazioni astronomiche (le quali ad una stessa altezza nell'intervallo di qualche ora rimangono costanti) e dall'esattezza delle divisioni dello stromento, poichè l'altezza comune rimane inutile, nè è necessario osservarla.

59. Prima di abbandonare questa materia, non sarà inutile ricercare in quali circostanze gli errori inevitabili delle osservazioni hanno la minima influenza nella determinazione delle incognite λ e ϕ.

Nel primo e secondo metodo la determinazione di λ e ϕ dipende dalla risoluzione di due triangoli sferici. Se per applicare ad essi le formule differenziali che abbiamo esposte nella Trigonometria, immaginiamo la lettera A all'astro, la lettera B al zenit, la lettera C al polo, le denominazioni impiegate nella Trigonometria applicate al caso attuale daranno $a = \phi$, $b = \delta$, $c = h$, $B =$ azimut contato dal nord $= Z$; $C = \lambda$. Quindi osservando che $d b = d \delta = 0$, la terza formula (c) (§ XVI Trig.) darà $d h = \cos Z\, d \phi + \sen \phi \sen Z\, d \lambda$.

Parimente se nella seconda osservazione h', Z', $\lambda + \theta$ rappresentano la distanza dal zenit, l'azimut contato dal nord, e l'angolo orario, avremo

$$d\,h' = \cos Z'\,d\,\varphi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} Z'\,d\,\lambda + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} Z'\,d\,\theta,$$

dalle qnali due eqnazioni si ricava

$$d\,\varphi = \frac{\operatorname{sen} Z'}{\operatorname{sen}(Z'-Z)}\,d\,h - \frac{\operatorname{sen} Z}{\operatorname{sen}(Z'-Z)}\,d\,h' + \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} Z \operatorname{sen} Z'}{\operatorname{sen}(Z'-Z)}\,d\,\theta,$$

$$\operatorname{sen}\varphi\,d\lambda = -\frac{\cos Z'}{\operatorname{sen}(Z'-Z)}\,d\,h + \frac{\cos Z}{\operatorname{sen}(Z'-Z)}\,d\,h' - \frac{\operatorname{sen} Z' \cos Z}{\operatorname{sen}(Z'-Z)} \operatorname{sen}\varphi\,d\theta.$$

Dalle formule precedenti apparisce, che se $d\,h$, $d\,h'$, $d\,\theta$ rappresentano gli errori delle osservazioni in h, h', θ, la loro influenza in $d\,\varphi$ e $d\,\lambda$ sarà la più piccola possibile, quando sarà $Z' - Z = 90°$.

Nel terzo metodo siano $d\,t$, $d\,t'$, $d\,t''$ gli errori ridotti in arco commessi nello stimare il tempo, in cui i tre dati astri giungono alla stessa altezza; e siano $d\,h$, $d\,\varphi$, $d\,\lambda$ gli errori che indi ne risultano nelle incognite h, φ, λ. Chiamando Z, Z', Z'' i tre corrispondenti azimut valutati dal nord, avremo con un ragionamento simile a quello del caso precedente

$$d\,h = \cos Z\ \ d\,\varphi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} Z\ \ d\,\lambda$$
$$d\,h = \cos Z'\ d\,\varphi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} Z'\ (d\,\lambda - d\,\theta)$$
$$d\,h = \cos Z''\,d\,\varphi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} Z''\,(d\,\lambda - d\,\theta')$$

Indicando ora per $d\,k$ la variazione risultante nell'errore dell'orologio, sarà $d\,\lambda = d\,t + d\,k$, $d\,\lambda - d\,\theta = d\,t' + d\,k$, $d\,\lambda - d\,\theta' = d\,t'' + d\,k$. Introdotti questi valori nelle tre superiori equazioni, si sottragga successivamente la prima dalla seconda, la prima dalla terza; otterremo così le due seguenti

$$(\cos Z' - \cos Z)d\varphi + (\operatorname{sen} Z' - \operatorname{sen} Z)\operatorname{sen}\varphi\,dk = \operatorname{sen} Z \operatorname{sen}\varphi\,dt - \operatorname{sen} Z' \operatorname{sen}\varphi\,dt'$$
$$(\cos Z'' - \cos Z)d\varphi + (\operatorname{sen} Z'' - \operatorname{sen} Z)\operatorname{sen}\varphi\,dk = \operatorname{sen} Z \operatorname{sen}\varphi\,dt - \operatorname{sen} Z'' \operatorname{sen}\varphi\,dt''$$

Eliminando da qneste due equazioni prima $d\,k$, poi $d\,\varphi$ (fatte le opportune ridnzioni) otterremo

$$(1)\,[\operatorname{sen}(Z''-Z') + \operatorname{sen}(Z'-Z) + \operatorname{sen}(Z-Z'')]d\varphi = \operatorname{sen} Z(\operatorname{sen} Z'' - \operatorname{sen} Z')dt \operatorname{sen}\varphi$$
$$+ \operatorname{sen} Z'(\operatorname{sen} Z - \operatorname{sen} Z'')\,dt' \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} Z''(\operatorname{sen} Z' - \operatorname{sen} Z)\,dt'' \operatorname{sen}\varphi$$

$$(2)\,[\operatorname{sen}(Z''-Z') + \operatorname{sen}(Z'-Z) + \operatorname{sen}(Z-Z'')]dk \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen} Z(\cos Z' - \cos Z'')dt \operatorname{sen}\varphi$$
$$+ \operatorname{sen} Z'(\cos Z'' - \cos Z)\,dt' \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} Z''(\cos Z - \cos Z')\,dt'' \operatorname{sen}\varphi$$

Da queste due eqnazioni facilmente si deducono i segnenti valori di $d\,\varphi$ e di $d\,\lambda$

$$d\varphi = \frac{\operatorname{sen} Z \cos \frac{1}{2}(Z''+Z')}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z''-Z) \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z'-Z)}\,dt \operatorname{sen}\varphi + \frac{\operatorname{sen} Z' \cos \frac{1}{2}(Z''+Z)}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z'-Z'') \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z'-Z)}\,dt' \operatorname{sen}\varphi$$
$$+ \frac{\operatorname{sen} Z'' \cos \frac{1}{2}(Z'+Z)}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z''-Z) \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z''-Z')}\,dt'' \operatorname{sen}\varphi; \quad dk = \frac{\operatorname{sen} Z \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z'+Z'')}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z'-Z) \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z'-Z)}\,dt$$
$$+ \frac{\operatorname{sen} Z' \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z+Z'')}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z'-Z'') \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z'-Z)}\,dt' + \frac{\operatorname{sen} Z'' \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z+Z')}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z''-Z) \operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z''-Z')}\,dt''.$$

I valori di $d\,\varphi$ e di $d\,k$ dimostrano, che non vi sarà a temere un'influenza rimarchevole nei risultamenti per parte dell'errore delle osser-

vazioni, se non quando le differenze degli azimut saranno troppo piccole. Nello scegliere le stelle che si vogliono osservare, basterà adunque avere questa avvertenza, che gli azimut differiscano molto fra loro, e si avvicinino più che è possibile ad abbracciare un intervallo di 180°.

Chi volesse sopra questi metodi degli ulteriori dettagli potrà consultare il vol. XVIII e XIX del giornale intitolato *Monatliche correspondenz etc.*, ed una Memoria del chiar. sig. Oriani inserita nelle Effemeridi di Milano per il 1810.

Se il tempo dell'orologio fosse conosciuto presso a poco, si potranno adoperare delle notabili abbreviazioni di calcolo, come si può vedere in una mia Memoria inserita nel vol. XVI della Società italiana, nella quale dietro quest'ultimo metodo ho preso a determinare la latitudine dell'Osservatorio di Padova con molte osservazioni.

A maggiore intelligenza delle cose esposte in questo capitolo, aggiungerò due esempi numerici, il primo dei quali è relativo al secondo metodo, e l'altro al terzo, affinchè gli studiosi sempre più si rendano familiare l'esercizio delle tavole nel calcolo delle formule trigonometriche.

Esempio del secondo metodo.

La sera del giorno 9 Agosto 1829 con un circolo ripetitore ad un orologio regolato sul tempo sidereo, osservai le distanze dal zenit di α della Vergine, e di α dell'Aquila; la prima avendo già passato il meridiano, mentre la seconda non vi era ancora giunta. Applicata la rifrazione alle distanze osservate, ottenni

per α della Vergine . $t = 17^h\ 15'\ 22'',25$; $h = 77°\ 0'\ 57'',0$

α dell'Aquila . . $t' = 17\ 45\ 37,50$; $h' = 44\ 54\ 5,5$

Prendendo le posizioni apparenti di queste due stelle dall'*Almanacco nautico* di Londra per l'anno 1829 trovasi per questa sera

$\alpha = 13^h\ 16'\ 13'',31$; $\delta = 100°\ 16'\ 0'',6$

$\alpha' = 19\ 42\ 29,64$; $\delta' = 81\ 34\ 14,7$

Cadendo la prima osservazione all'occidente, si avrà

$\theta = \alpha' - \alpha - (t' - t) = 5^h\ 56'\ 1'',08$, ovvero in gradi $\theta = 89°\ 0'\ 16'',2$.

Dietro questi dati avremo

$$\begin{array}{rl} \log\cos\theta = & 8,2398968 + \\ \log\tan\delta' = & 0,8291845 + \\ \hline \log\tan F = & 9,0690813 + \\ F = & 6°\ 41'\ 12'',9 \\ \delta = & 100\ 16\ 0,6 \\ \delta - F = & 93\ 34\ 47,7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\tan\theta = & 1,7600376 + \\ \log\text{sen}\, F = & 9,0661168 + \\ \text{c.}\log\text{sen}\,(\delta - F) = & 0,0008483 + \\ \hline \log\tan y = & 0,8270027 + \\ y = & 81°\ 31'\ 44'',1 \\ x = & 90\ 31\ 40,9 \end{array}$$

$$\log\cot(\delta-F) = 8{,}7963159 -$$
$$\log\cos y = 9{,}1682330 +$$
$$\log\cot x = 7{,}9645489 -$$

$$\log\,\mathrm{sen}\,(p-h) = 9{,}6883879$$
$$\log\,\mathrm{sen}\,(p-x) = 9{,}4321847$$
$$\mathrm{c.}\log\,\mathrm{sen}\,h = 0{,}0112484$$
$$\mathrm{c.}\log\,\mathrm{sen}\,x = 0{,}0000184$$
$$\log\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}z = 9{,}1318394$$
$$\log\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}z = 9{,}5659197$$

$$\log\tan(y-z) = 9{,}8980636 +$$
$$\log\,\mathrm{sen}\,G = 9{,}9820024 +$$
$$\mathrm{c.}\log\,\mathrm{sen}\,(\delta-G) = 0{,}3482277 +$$
$$\log\tan\lambda = 0{,}2282937 +$$

$$\log\cos\lambda = 9{,}7066242 +$$
$$\log\cot(\delta-G) = 0{,}2994572 +$$
$$\log\tan L = 0{,}0060814$$

$$L = 45^\circ\,24'\,4'',1.$$

$$\tfrac{1}{2}(h+h'+x)=p=106^\circ\,13'\,21'',7$$
$$p-h = 29\;\;12\;\;24\;,7$$
$$p-x = 15\;\;41\;\;40\;,8$$
$$\tfrac{1}{2}z = 21\;\;35\;\;45\;,9$$
$$z = 43\;\;11\;\;31\;,8$$
$$y-z = 38\;\;20\;\;12\;,3$$

$$\log\cos(y-z) = 9{,}8945258 +$$
$$\log\tan h = 0{,}6371837 +$$
$$\log\tan G = 0{,}5317095 +$$
$$G = 73^\circ\,37'\,30'',3$$
$$\delta - G = 26\;\;38\;\;53\;,3$$

angolo orario $\lambda = 59\;\;24\;\;36\;,2$

in tempo $\lambda = 3^h\,57'\,38'',41$

AR di α Verg. $= 13\;\;16\;\;13\;,31$

tempo siderale $= 17\;\;13\;\;51\;,72$

tempo dell'orol. $= 17\;\;15\;\;22\;,25$

correz. dell'orol. $= \;-1\;\;30\;,53$

Esempio relativo al terzo metodo.

La sera del giorno 18 Maggio 1819 nella parte orientale del cielo osservai col mezzo di un quadrante mobile di piedi 2 ½ di raggio gl'istanti che segnava un orologio regolato al tempo sidereo, mentre α della Vergine, α del Serpente, α della Lira pervennero ad una stessa altezza, ed erano i seguenti

per α della Vergine $t = 10^h\,41'\,30'',0 = 160^\circ\,22'\,30'',0$

α del Serpente $t' = 11\;\;27\;\;59\;,5 = 171\;\;59\;\;52\;,5$

α della Lira . $t'' = 12\;\;18\;\;34\;,5 = 184\;\;38\;\;37\;,5$

Prendendo ora le AR e declinazioni delle indicate stelle dal catalogo del cel. Piazzi (Palermo 1814), ed applicandovi quelle piccole correzioni dipendenti dall'aberrazione e nutazione, che verranno in seguito esposte, formo i valori di α, α', α'', δ, δ', δ'' come segue

$$\alpha = 198^\circ\,55'\,25'',8;\quad \alpha' = 233^\circ\,50'\,47'',5;\quad \alpha'' = 277^\circ\,42'\,33'',4$$
$$\delta = 100\;\;12\;\;59\;,5;\quad \delta' = 83\;\;0\;\;5\;,4;\quad \delta'' = 51\;\;23\;\;3\;,7$$

$$\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha) - \tfrac{1}{2}(t'-t) = 11^\circ\,38'\,59'',6$$
$$\tfrac{1}{2}\theta' = \tfrac{1}{2}(\alpha''-\alpha) - \tfrac{1}{2}(t''-t) = 27\;\;15\;\;30\;,05$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta+\delta') = 91^\circ\,36'\,32'',45;\qquad \tfrac{1}{2}(\delta+\delta'') = 75^\circ\,48'\,1'',60$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') = 8\;\;36\;\;27\;,05;\qquad \tfrac{1}{2}(\delta-\delta'') = 24\;\;24\;\;57\;,90$$

$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta = 9{,}3052025 +$
$\log \cot \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') = 0{,}8199604 +$
$\log A \operatorname{sen} B = 0{,}1251629 +$

$\log \cos \tfrac{1}{2}\theta = 9{,}9909600 +$
$\log \cot \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = 8{,}4485513 -$
$\log A \cos B = 8{,}4395113 -$

Quindi $\log \operatorname{tang} B = 1{,}6856516 -$
$\log \operatorname{sen} B = 9{,}9999077 +$
$\log \cos B = 8{,}3142561 -$

e però $\log A = 0{,}1252552 +$

$B = 91^\circ\, 10'\, 53'',16$

$C = \tfrac{1}{2}\theta - B = -\, 79\ \ 31\ \ 53\ ,56$

$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta' = 9{,}6608687 +$
$\log \cot \tfrac{1}{2}(\delta - \delta'') = 0{,}3429838 +$
$\log A' \operatorname{sen} B' = 0{,}0038525 +$

$\log \cos \tfrac{1}{2}\theta' = 9{,}9488775 +$
$\log \cot \tfrac{1}{2}(\delta + \delta'') = 9{,}4031731 +$
$\log A' \cos B' = 9{,}3520506 +$

Quindi $\log \operatorname{tang} B' = 0{,}6518019 +$
$\log \operatorname{sen} B' = 9{,}9894665 +$
$\log \cos B' = 9{,}3376646 +$

e però $\log A' = 0{,}0143860 +$

$B' = 77^\circ\, 25'\, 54'',21$

$C' = \tfrac{1}{2}\theta' - B' = -\, 50\ \ 10\ \ 24\ ,16$

$\tfrac{1}{2}(C' - C) = +\, 14\ \ 40\ \ 44\ ,70$

$\tfrac{1}{2}(C' + C) = -\, 64\ \ 51\ \ \ 8\ ,86$

$\log \operatorname{tang} \zeta = \log \dfrac{A'}{A} = 9{,}8891308 +$

$\zeta = 37^\circ\, 45'\, 53'',17;\ \ 45^\circ - \zeta = 7^\circ\, 14'\, 6'',83$

$\log \operatorname{tang}(45 - \zeta) = 9{,}1036468 +$
$\log \cot \tfrac{1}{2}(C' - C) = 0{,}5817724 +$
$\log \operatorname{tang} \psi = 9{,}6854192 +$

$\psi = +\, 25\ \ 51\ \ 24\ ,05$

In seguito otterremo $\lambda = \tfrac{1}{2}(C' + C) + \psi = -\ 38^\circ\, 59'\, 44'',81$
$\lambda - C = +\ 40^\circ\, 32'\, 8'',75;\ \ \lambda - C' = +\ 11\ \ 10\ \ 39\ ,35$

L'AR del punto culminante al momento della
prima osservazione $= \alpha + \lambda$ . . . . . . $= 159\ \ 55\ \ 41\ ,\ 0$
e questa ridotta in tempo darà il tempo sidereo
in prima osservazione . . . . $= 10^h\, 39'\, 42'',73$
tempo segnato dall'orologio $= t$ . . . . . . $= 10\ \ 41\ \ 30\ ,00$

correz. dell'orologio . $=$ $1\ \ 47\ ,27$

Si otterrà poi la latitudine dalle equazioni

$$\operatorname{tang} L = A \cos(\lambda - C) = A' \cos(\lambda - C'),$$

le quali si accordano a dare $L = 45^\circ\, 24'\, 1'',15$. Se dei risultamenti ottenuti con questi due metodi prendesi il medio, trovasi $L = 45^\circ\, 24'\, 2'',6$ quasi coincidente con la vera latitudine dell'Osservatorio $45^\circ\, 24'\, 2'',5$; onde scorgesi potersi essi utilmente sostituire per la ricerca della medesima alle osservazioni meridiane.

CAPITOLO IV.

Relazioni fra le ascensioni rette e declinazioni, longitudini e latitudini degli astri.

60. Avendo osservata l'AR e la declinazione degli astri, occorre spesse volte di conoscere la loro longitudine, e la loro latitudine, ovvero viceversa essendo conosciuta la loro longitudine e la loro latitudine talvolta si desidera la loro AR e la loro declinazione. Esporremo nei seguenti problemi i rapporti fra queste diverse quantità.

*Problema I. Data l'*AR *e la declinazione di un astro, determinare la sua longitudine e la sua latitudine.*

61. (*Fig.* 16) Rappresenti $Q\Upsilon$ l'equatore, $E\Upsilon$ l'ecclittica, Υ l'equinozio di primavera, S un astro. Conducasi il circolo di declinazione SA perpendicolare all'equatore, ed il circolo di latitudine SC perpendicolare all'ecclittica. Dati ora $A\Upsilon = AR$ dell'astro $= \alpha$, $AS =$ declinazione del medesimo $= \delta$, e l'obbliquità dell'ecclittica $E\Upsilon Q = \iota$, si tratta di trovare la sua longitudine $\Upsilon C = l$, e la sua latitudine $SC = \lambda$. Condotto l'arco di circolo massimo $S\Upsilon$, pongasi $S\Upsilon = P$, $S\Upsilon A = \phi$. Si avrà dal triangolo rettangolo $SA\Upsilon$

$$(1)\ \cos P = \cos\alpha\cos\delta\,; \qquad (2)\ \operatorname{tang}\phi = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Quindi il triangolo rettangolo $S\Upsilon C$ darà

$$(3)\ \operatorname{sen}\lambda = \operatorname{sen}P\operatorname{sen}(\phi - \iota)\,; \qquad (4)\ \operatorname{tang}l = \operatorname{tang}P\cos(\phi - \iota),$$

per mezzo delle quali equazioni si potranno sempre calcolare i valori di λ e di l. Si possono dalle quattro equazioni precedenti eliminare i valori di ϕ e di P; otterremo così le due seguenti equazioni

$$(5)\ \operatorname{sen}\lambda = \cos\iota\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\iota\operatorname{sen}\alpha\cos\delta\,;$$

$$(6)\ \operatorname{tang}l = \cos\iota\operatorname{tang}\alpha + \frac{\operatorname{sen}\iota\operatorname{tang}\delta}{\cos\alpha},$$

alle quali si può eziandio aggiungere la relazione $\cos\lambda\cos l = \cos\alpha\cos\delta$, la quale esprime esser l'arco $S\Upsilon$ ipotenusa comune ai due triangoli $SC\Upsilon$, $SA\Upsilon$.

Problema II. Data la longitudine l, *e la latitudine* λ *di un astro* S *trovare la sua ascensione retta* α, *e la sua declinazione* δ.

62. (*Fig.* 16) Pongasi $S\Upsilon = P$, $S\Upsilon C = \phi$; avremo nel triangolo sferico $SC\Upsilon$ rettangolo $\cos P = \cos l\cos\lambda$; $\operatorname{tang}\phi = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{sen}l}$. Avendo calcolato P, ϕ col mezzo di queste due equazioni, dal triangolo rettangolo $S\Upsilon A$, osservando che $S\Upsilon A = \phi \pm \iota$, avremo

$\text{sen}\,\delta = \text{sen}\,P\,\text{sen}\,(\epsilon + \phi)$; $\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,P\cos(\epsilon \mp \phi)$,
col mezzo delle quali equazioni potransi sempre calcolare δ ed α. Da queste due ultime eliminando P e ϕ si ottengono le due seguenti

$$(1)\quad \text{sen}\,\delta = \text{sen}\,\epsilon\cos\lambda\,\text{sen}\,l + \cos\epsilon\,\text{sen}\,\lambda\,;$$

$$(2)\quad \text{tang}\,\alpha = \cos\epsilon\,\text{tang}\,l - \frac{\text{sen}\,\epsilon\,\text{tang}\,\lambda}{\cos l},$$

alle quali si può aggiungere la relazione $\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos l$, che servirà di riprova al calcolo.

63. *Scolio I.* La soluzione dei due precedenti problemi si può far dipendere dalla risoluzione di un sol triangolo sferico nel modo seguente. Sia (*Fig.* 17) ΥQ l'equatore, ΥC l'eclittica, P il polo dell'equatore, E il polo dell'eclittica. Sarà $EPCQcq$ un circolo massimo perpendicolare all'equatore ed all'eclittica, e perciò l'equinozio Υ sarà il polo di questo circolo; quindi gli archi ΥC, ΥQ, Υc, Υq, saranno tutti $= 90°$. Sia ora S un astro; condotti i circoli di declinazione, e di latitudine PSA, ESB, sarà

$A\Upsilon = AR$ di astro $S = \alpha$; $AS =$ declinazione di $S = \delta$;
$\Upsilon B =$ longitudine di $S = l$; $BS =$ latitudine di $S = \lambda$;
$A\Upsilon B = QC =$ obbliquità dell'eclittica $= \epsilon$.

Nel triangolo EPS si avrà angolo $EPS = 90 + \alpha$, $PES = 90 - l$, $EP = \epsilon$, $PS = 90 - \delta$, $ES = 90 - \lambda$.

Ora nel triangolo EPS essendo dati EP, ES, PES, si avrà

$$\cot P = \frac{\cot ES\,\text{sen}\,EP - \cos E\cos EP}{\text{sen}\,E};$$

$$\cos PS = \cos E\,\text{sen}\,ES\,\text{sen}\,EP + \cos ES\cos EP,$$

ossia

$$-\text{tang}\,\alpha = \frac{\text{tang}\,\lambda\,\text{sen}\,\epsilon - \text{sen}\,l\cos\epsilon}{\cos l};$$

$$\text{sen}\,\delta = \text{sen}\,l\cos\lambda\,\text{sen}\,\epsilon + \text{sen}\,\lambda\cos\epsilon,$$

le quali si riducono alle formule (1), (2) del § 62.

Col mezzo dello stesso triangolo dati essendo i lati EP, PS, e l'angolo EPS sarà facile di trovare ES, e l'angolo PES, e quindi la longitudine e la latitudine, e si ricaderà nelle formule (5), (6) del problema primo.

64. *Scolio II.* Si può ancora riferire la posizione dell'astro S all'equatore ed all'ecclitica col mezzo di coordinate rettangole, e da queste si possono con eguale facilità ricavare i rapporti generali fra l'AR, la declinazione, la longitudine e la latitudine esposti di sopra. Siccome un tal modo di determinare la posizione di un corpo celeste è utilissimo, massime nell'Astronomia fisica, così crediamo doverlo qui inserire, come a suo luogo opportuno.

(*Fig.* 18) Rappresenti S il centro della sfera celeste, ed SRH sia la superficie dell'equatore, SRH' la superficie dell'eclittica. Sia P la

posizione di un astro qualunque, e la intersezione $SR\Upsilon$ dell' ecclittica con l'equatore sia diretta all'equinozio di primavera, da cui si principiano a numerare le ascensioni rette e le longitudini. Siccome l'AR si valuta per un arco dell' equatore compreso fra l' equinozio ed un piano ad esso perpendicolare, che passa per l' astro dato, e pel centro S della sfera, così sarà eziandio uguale all' angolo che l' intersezione di questo piano con l' equatore fa colla linea degli equinozj. Se pertanto si condurrà il piano SPC perpendicolare all' equatore, l'angolo RSC sarà l'AR di P, e l'angolo CSP, che rappresenta la sua distanza angolare all'equatore, sarà la sua declinazione. Con un discorso analogo si proverà, che condotto un piano SPM perpendicolare all'ecclittica, sarà l'angolo RSM la longitudine, ed MSP la latitudine del dato astro P. Ciò posto, per l' astro P conducasi una perpendicolare PC all' equatore, e per lo piede C di essa un'altra perpendicolare CR alla linea degli equinozj; saranno SR, RC, CP le coordinate ortogonali di P rapporto all' equatore. Parimente condotta PM perpendicolare all' ecclittica, conducasi pel suo piede M la MR perpendicolare alla stessa linea degli equinozj. Saranno MR, CR, PR comprese in uno stesso piano perpendicolare alla $S\Upsilon$, e quindi l'angolo MRC rappresenterà l' obbliquità dell' ecclittica. Le linee poi SR, RM, MP saranno le coordinate ortogonali di P rapporto all' ecclittica. Pongasi

$$SR=x,\ RC=y,\ CP=z,\ SP=r,$$
$$SR=x',\ RM=y',\ MP=z',\ RP=r',$$
$$RSC=\alpha,\ CSP=\delta,\ RSM=l,\ MSP=\lambda,\ CRM=\iota,\ MRP=\zeta;$$

avremo evidentemente

$$x=r\cos\alpha\cos\delta\,,\quad y=r\,\text{sen}\,\alpha\cos\delta\,,\quad z=r\,\text{sen}\,\delta\,,$$
$$x'=r\cos l\cos\lambda,\quad y'=r\,\text{sen}\,l\cos\lambda,\quad z'=r\,\text{sen}\,\lambda.$$

Per trovare ora il rapporto fra x, y, z, x', y', z', osservando che le linee RC, RM, RP sono in uno stesso piano, avremo le seguenti equazioni

$$x'=x,\quad y'=r'\cos\zeta,\quad z'=r'\,\text{sen}\,\zeta,$$
$$y=r'\cos(\zeta+\iota)=y'\cos\iota-z'\,\text{sen}\,\iota,$$
$$z=r'\,\text{sen}\,(\zeta+\iota)=z'\cos\iota+y'\,\text{sen}\,\iota.$$

Sostituendo i valori di x, y, z, x', y', z' dati di sopra avremo (dividendo per r)

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \cos\alpha\cos\delta=\cos l\cos\lambda\\ (2) & \text{sen}\,\alpha\cos\delta=\text{sen}\,l\cos\lambda\cos\iota-\text{sen}\,\lambda\,\text{sen}\,\iota\\ (3) & \text{sen}\,\delta=\text{sen}\,\lambda\cos\iota+\text{sen}\,l\cos\lambda\,\text{sen}\,\iota\end{array}\right\}\ (A)$$

La terza delle quali dà il valore di sen δ dato di sopra; la seconda divisa per la prima dà il valore di tang α già riferito.

Se invece avessimo espresso x', y', z' per x, y, z avremmo trovato le seguenti equazioni

$$x' = x,\quad y' = y\cos\varepsilon + z\,\mathrm{sen}\,\varepsilon,\quad z' = z\cos\varepsilon - y\,\mathrm{sen}\,\varepsilon,$$

dalle quali si ricava tosto

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ \cos l\cos\lambda = \cos\alpha\cos\delta\\
&(2)\ \mathrm{sen}\,l\cos\lambda = \cos\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\delta + \mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\\
&(3)\ \mathrm{sen}\,\lambda = \cos\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\delta - \mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\delta
\end{aligned}\right\}\ (B)$$

La seconda divisa per la prima dà il valore superiore di tang l.

Alle formule (A), (B) si suol dare ancora una forma molto più comoda per il calcolo logaritmico, introducendovi un angolo ausiliario. Per le formule (A) pongasi

(a) $\mathrm{tang}\,\zeta = \mathrm{sen}\,l\cot\lambda$, ed esse diverranno

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ \cos\alpha\cos\delta = \cos l\cos\lambda;\quad (2)\ \mathrm{sen}\,\alpha\cos\delta = \frac{\mathrm{sen}\,\lambda\,\mathrm{sen}(\zeta-\varepsilon)}{\cos\zeta}\\
&(3)\ \mathrm{sen}\,\delta = \frac{\mathrm{sen}\,\lambda\cos(\zeta-\varepsilon)}{\cos\zeta}
\end{aligned}\right\}\ (A')$$

col mezzo delle quali si potrà facilmente determinare l'AR e la declinazione di un astro, conosciuta la longitudine e la latitudine. I valori di α e di δ si potranno più comodamente ottenere dalle seguenti equazioni, le quali non sono che una combinazione delle equazioni (A').

$$(a)\ \mathrm{tang}\,\zeta = \mathrm{sen}\,l\cot\lambda;\qquad (b)\ \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\mathrm{tang}\,l\,\mathrm{sen}(\zeta-\varepsilon)}{\mathrm{sen}\,\zeta};$$

$$(c)\ \mathrm{tang}\,\delta = \mathrm{sen}\,\alpha\cot(\zeta-\varepsilon).$$

Parimente le equazioni (B) si renderanno più atte al calcolo logaritmico introducendo un angolo ausiliario ζ' calcolato colla seguente equazione

(a') $\mathrm{tang}\,\zeta' = \mathrm{sen}\,\alpha\cot\delta$. Esse in fatti diverranno

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ \cos\lambda\cos l = \cos\alpha\cos\delta;\quad (2)\ \cos\lambda\,\mathrm{sen}\,l = \frac{\mathrm{sen}\,\delta}{\cos\zeta'}\,\mathrm{sen}(\zeta'+\varepsilon)\\
&(3)\ \mathrm{sen}\,\lambda = \frac{\mathrm{sen}\,\delta\cos(\zeta'+\varepsilon)}{\cos\zeta'};
\end{aligned}\right\}\ (B')$$

dalla combinazione delle quali risultano le seguenti equazioni per calcolare la longitudine, e la latitudine col mezzo della AR, e declinazione

$$(a')\ \mathrm{tang}\,\zeta' = \mathrm{sen}\,\alpha\cot\delta;\qquad (b')\ \mathrm{tang}\,l = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{sen}(\zeta'+\varepsilon)}{\mathrm{sen}\,\zeta'};$$

$$(c')\ \mathrm{tang}\,\lambda = \mathrm{sen}\,l\cot(\zeta'+\varepsilon).$$

65. *Scolio III.* (*Fig.* 17) Accade spesse volte, che oltre la longitudine e la latitudine di un astro data per l'AR e declinazione si desideri di conoscere l'angolo S compreso fra il circolo di latitudine ed il circolo di declinazione, al quale si dà il nome di *angolo di posizione*. Il triangolo EPS darà per determinare quest'angolo le seguenti equazioni

$$\mathrm{sen}\,S = \frac{\mathrm{sen}\,\varepsilon\cos l}{\cos\delta} = \frac{\mathrm{sen}\,\varepsilon\cos\alpha}{\cos\lambda};\qquad \cos S = \frac{\cos\varepsilon - \mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,\lambda}{\cos\delta\cos\lambda},$$

le quali due equazioni ci daranno l'angolo S, ed il quadrante in cui deve essere preso, quando le AR e le longitudini si fanno crescere continuamente da 0° fino a 360°. Che se si volesse determinare la longitudine, latitudine ed angolo di posizione al tempo stesso per l'AR e declinazione, o viceversa, le relazioni del dott. Gauss (Trig. XII) applicate al triangolo EPS somministreranno una comodissima soluzione, che stimiamo inutile di qui riferire, potendosi ciascheduno con facilità formarne le equazioni generali a guida del calcolo numerico.

Problema III. Date l' AR *e la declinazione di un astro determinare le variazioni della longitudine e della latitudine per una piccola variazione nell'* AR *e nella declinazione.*

66. Noi supponiamo in questo problema gli aumenti dell'AR e della declinazione tanto piccoli che le loro potenze superiori alla prima siano trascurabili. In tal guisa le longitudini e latitudini prenderanno aumenti tali, che eziandio le loro superiori potenze saranno trascurabili. Ciò posto, supponiamo che α si cangi in $\alpha + d\alpha$, δ in $\delta + d\delta$, l in $l + dl$, λ in $\lambda + d\lambda$. Differenziando le due equazioni

$$\text{sen}\,\lambda = \cos\varepsilon\,\text{sen}\,\delta - \text{sen}\,\iota\,\text{sen}\,\alpha\cos\delta,$$

$$\text{tang}\,l = \cos\iota\,\text{tang}\,\alpha + \frac{\text{sen}\,\varepsilon\,\text{tang}\,\delta}{\cos\alpha}, \quad \text{si otterrà}$$

$$(1)\quad d\lambda = \frac{\cos\varepsilon\cos\delta + \text{sen}\,\varepsilon\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\delta}{\cos\lambda}\,d\delta - \frac{\text{sen}\,\iota\cos\alpha\cos\delta}{\cos\lambda}\,d\alpha\,;$$

$$(2)\quad d\,l = \frac{\cos^2 l}{\cos^2\alpha}(\cos\varepsilon + \text{sen}\,\varepsilon\,\text{sen}\,\alpha\,\text{tang}\,\delta)\,d\alpha + \frac{\cos^2 l\,\text{sen}\,\varepsilon}{\cos\alpha\cos^2\delta}\,d\delta\,.$$

Questi valori si possono porre sotto una forma più comoda introducendovi l'angolo di posizione S. In fatti se nel valore di $\cos S$ dato di sopra si pone in luogo di $\text{sen}\,\lambda$ il suo valore dato nel problema II, esso diviene

$$\cos S = \frac{\cos\iota\cos^2\delta + \text{sen}\,\iota\,\text{sen}\,\delta\cos\delta\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\lambda\cos\delta} = \frac{\cos\iota\cos\delta + \text{sen}\,\varepsilon\,\text{sen}\,\delta\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\lambda}\,.$$

Col mezzo di questo valore, e di quello di $\text{sen}\,S$ del numero precedente, i valori di $d\lambda$ e di $d\,l$ divengono

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad & d\lambda = \cos S\,d\delta - \cos\delta\,\text{sen}\,S\,d\alpha \\ (2)\quad & d\,l = \frac{\cos S\cos\delta}{\cos\lambda}\,d\alpha + \frac{\text{sen}\,S}{\cos\lambda}\,d\delta\end{aligned}\right\}\quad(E)$$

le quali completamente risolvono il proposto quesito. Esse riescono inesatte quando l'astro è molto vicino al polo dell'ecclittica, essendo allora $\cos\lambda$ molto piccolo.

Problema IV. Data una piccola variazione alla longitudine ed alla latitudine, determinare le variazioni che ne risultano nell' AR *e nella declinazione.*

67. Si potrebbero tali variazioni ottenere differenziando i valori di tang α e di sen δ dati nel problema II, e facendovi delle riduzioni analoghe alle già accennate nel problema precedente, si giungerebbe sempre allo scopo desiderato. Ma è più sempliee dedurre dalle equazioni (E) del problema precedente i valori di $d\alpha$ e di $d\delta$ espressi per dl, $d\lambda$. Si troverà così

$$d\delta = \text{sen}\, S \cos\lambda\, dl + \cos S\, d\lambda\,; \quad d\alpha = \cos S \frac{\cos\lambda}{\cos\delta}\, dl - \frac{\text{sen}\, S}{\cos\delta}\, d\lambda\,,$$

le quali cessano di essere utili quando l'astro è molto vicino al polo dell'equatore.

Scolio. In tutte le formule precedenti, se tanto le AR, quanto le longitudini si fanno procedere da 0° fino a 360°, le regole ordinarie dei segni delle funzioni trigonometriche daranno sempre senza alcuna indeterminazione le cercate quantità. Le declinazioni e latitudini boreali essendo riguardate come positive, le australi dovranno sempre reputarsi negative. Osserveremo inoltre, che i rapporti ritrovati in questi due problemi si potevano speditamente ricavare dalle relazioni fra gli elementi differenziali sviluppate nella trigonometria applicate al triangolo EPS (*fig.* 17) in cui il lato EP sia costante; e si vedrà facilmente che tosto derivano dall'applicazione fatta in fine del § XVI.

68. Per dare un esempio numerico relativo al calcolo delle longitudini e latitudini degli astri col mezzo delle loro ascensioni rette e declinazioni, calcolo in Astronomia comunissimo, proponiamoci di trovare la longitudine e latitudine di un astro, la cui AR e declinazione fossero $\alpha = 128°\ 7'\ 57'',9$; $\delta = +\ 3°\ 23'\ 33'',3$, mentre l'obbliquità apparente dell'ecclittica era $\epsilon = 23°\ 27'\ 42'',6$.

Noi sceglieremo per guida del calcolo le formule (a'), (b'), (c') dello scolio II, che sono le più semplici, lasciando alla diligenza dei giovani studiosi l'esercizio numerico nel medesimo esempio colle equazioni (B'), le quali presentano più punti di riscontro.

Tipo del calcolo colle formule (a'), (b'), (c').

$$\begin{array}{rl}
\log \text{sen}\, \alpha = 9{,}8957441 & + \\
\log \cot \delta = 1{,}2270841 & + \\ \hline
\log \text{tang}\, \zeta' = 1{,}1228282 & + \\
\log \text{tang}\, \alpha = 0{,}1051173 & - \\
\log \text{sen}\, (\zeta' + \epsilon) = 9{,}9752720 & + \\
\text{c.} \log \text{sen}\, \zeta' = 0{,}0012299 & + \\ \hline
\log \text{tang}\, l = 0{,}0816192 & - \\
\text{Quindi}\ l = 129°\ 38'\ 50'',9 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\zeta' = 85°\ 41'\ 24'',1 & \\
\epsilon = 23\ \ 27\ \ 42\ ,6 & \\ \hline
\zeta' + \epsilon = 109\ \ \ 9\ \ \ 6\ ,7 & \\
\log \cot (\zeta' + \epsilon) = 9{,}5406987 & - \\
\log \text{sen}\, l = 9{,}8864821 & + \\ \hline
\log \text{tang}\, \lambda = 9{,}4271808 & - \\
\lambda = -\ 14°\ 58'\ 16'',6 &
\end{array}$$

Si toglierà qualunque incertezza sulla specie degli angoli λ ed l osservando 1.° che tanto le declinazioni quanto le latitudini sono sempre minori di $\pm 90°$; perciò i loro coseni saranno sempre positivi, e quando risulti tang λ negativa la latitudine sarà australe; 2.° in virtù dell' equazione $\cos\alpha \cos\delta = \cos l \cos\lambda$, saranno sempre $\cos\alpha$, $\cos l$ dello stesso segno. Dati pertanto i segni di $\cos l$ e di tang l, la specie di l sarà determinata; nel caso presente essendo $\cos\alpha$, tang l ambedue negativi, apparterrà l al secondo quadrante, ove si è effettivamente preso.

Se si desiderasse inoltre l' angolo di posizione S, otterrassi mediante la formula $\operatorname{sen} S = \frac{\operatorname{sen}\iota \cos l}{\cos\delta}$, di cui eccone il calcolo

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen}\iota &= 9{,}6000337 + \\ \log\cos l &= 9{,}8048630 - \\ \text{c. } \log\cos\delta &= 0{,}0007618 + \\ \hline \log\operatorname{sen} S &= 9{,}4056585 - \end{aligned}$$

Quindi deducesi $S = -14° 44' 34'',6$, e prendendo il suo supplemento a $360°$, sarà $S = 345° 15' 25'',6$.

A vero dire il valore negativo di sen S potrebbe convenire eziandio ad un arco compreso fra $180°$ e $270°$. Per togliere l' ambiguità convien ricorrere alla formula $\cos S = \frac{\cos\iota - \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\delta}{\cos\lambda\cos\delta}$, la quale dà evidentemente per $\cos S$ un valore positivo, e perciò l' angolo S necessariamente compreso fra $270°$ e $360°$, come lo abbiamo determinato.

Problema V. Data l' altezza e l' azimut di un astro col tempo sidereo corrispondente, trovare la sua ascensione retta e declinazione, ovvero la sua longitudine e latitudine.

69. (*Fig.* 7) Considerando il triangolo sferico PZS, avremo qui date le seguenti quantità:

PZ = complemento di latitudine $= 90 - L$, che porremo $= L'$
ZS = complemento di altezza = distanza di astro dal zenit $= h'$
PZS = supplemento di azimut . . . . $= Z$.

Risolvendo colle formule esposte nella Trigonometria questo triangolo otterremo PS, complemento della declinazione; e l'angolo ZPS, ossia l'angolo orario. Se l'astro ha già passato il meridiano si toglierà dal tempo sidereo ridotto in gradi, ovvero si aggiungerà al tempo sidereo, se non ha ancora passato il meridiano, e si formerà l'AR dell' astro.

Determinata così la declinazione e l' AR, se ne potrà colle formule precedentemente esposte assegnare la sua longitudine e la sua latitudine.

Con questo mezzo si possono determinare, rapporto all' equatore,

le posizioni di quegli astri, che per la prima volta si osservano nel cielo stellato. Non si ha bisogno che di un orologio ben regolato al tempo sidereo, e di un buon quadrante mobile con un circolo orizzontale per osservarne ad un dato istante l'altezza e l'azimut.

Scolio. Qualora trattisi di determinare la posizione di un astro incognito, come per esempio di una nuova cometa rapporto all'equatore, mediante un quadrante mobile, dopo avere reso orizzontale il circolo azimutale conviene determinare la posizione del principio di numerazione tanto del circolo sopraddetto, quanto del quadrante verticale. Si ottiene questa con somma facilità osservando collo stromento l'altezza e l'azimut di una nota stella. Si calcola poi per il tempo dell'osservazione l'una e l'altro, e confrontato il risultamento del calcolo con l'osservazione si otterranno le quantità, che alle altezze ed azimuti osservati nello stromento conviene aggiungere o sottrarre per ottenere le vere altezze ed i veri azimuti, dei quali si deve far uso nel problema precedente.

Gli Astronomi però di raro pongono in opera questo metodo per determinare la posizione di un nuovo astro; essi ne osservano o mediante una macchina equatoriale, o mediante un micrometro applicato ad un cannocchiale le differenze di *AR*, e di declinazione con una stella nota, donde tosto si ottiene la sua vera posizione rapporto all'equatore.

CAPITOLO V.

Del moto del Sole; metodi per determinare la sua orbita.

70. Abbiamo già indicato, che il Sole oltre il moto diurno comune a tutti gli astri, ha pure un movimento particolare, col quale egli cambia di posizione rapporto alle stelle fisse. In virtù di un tal movimento egli va trasportandosi sempre da occidente verso oriente di circa un grado per ogni giorno in un piano inclinato all'equatore celeste di 23° 28′ circa. Così se in un determinato giorno dell'anno il Sole, ed una stella fissa passano contemporaneamente pel meridiano, il giorno seguente, la stella nell'orologio astronomico vi ritorna alla medesima ora, mentre il Sole vi giunge 4′ più tardi; lo che prova essersi egli trasportato verso oriente di un grado. Due giorni dopo il Sole passerà al meridiano 8′ dopo la stella, e così in seguito, finchè dopo 15 giorni, essendo la stella ritornata al meridiano, il Sole ne distà ancora di un'ora verso oriente. Ha dunque il Sole un movimento suo particolare, in virtù di cui sembra trasportarsi verso l'oriente

in modo che dentro lo spazio di un anno, ossia 365 giorni, apparisca di aver percorso l'intera circonferenza dell' ecclittica.

71. Per riconoscere ora più da vicino il moto del Sole, e scuoprire le leggi, alle quali ubbidisce, supponiamo che un osservatore giornalmente si occupi ad osservare la sua *AR* nel momento che passa pel meridiano, e la sua declinazione. Egli otterrà l'*AR* osservando giornalmente il momento del passaggio del suo centro pel meridiano all' orologio astronomico, e riducendo un tal tempo in gradi. Otterrà la sua declinazione togliendo dalla latitudine la distanza del suo centro dal zenit. Per meglio tener dietro al suo moto noi supporremo, che il lettore abbia sott' occhio l' Effemeridi di Milano, per esempio, dell' anno 1809, ove trovansi registrate le ascensioni rette e declinazioni del Sole per tutti i giorni di quell' anno pel mezzodì di Milano. Sebbene esse non siano state realmente osservate, sono però il risultamento delle tavole solari fondate sulle osservazioni.

72. Dall' andamento di queste posizioni egli è facile di raccogliere, che il Sole verso il 21 di Marzo trovavasi nell' equinozio di primavera con 0° 0' di *AR*, e con 0° 0' di declinazione; che in seguito tanto la sua *AR*, quanto la sua declinazione hanno continuato ad aumentare fino al 21 di Giugno. A quest' epoca la declinazione giunta al suo massimo aveva una piccolissima variazione diurna, ed il Sole sembrava, per così dire, rapporto alla declinazione stazionario. La sua *AR* trovavasi allora di 90°, e la declinazione era 23° 27' 41". Dopo il 21 di Giugno la declinazione del Sole principia di nuovo a diminuire per gradi insensibili, l'*AR* si aumenta di più in più, cosicchè verso il 23 di Settembre si trova pervenuto di bel nuovo all' equatore con 0° 0' di declinazione, e con 180° di *AR*, cioè ritrovasi in un punto del cielo stellato diametralmente opposto a quello, in cui trovavasi verso il 21 di Marzo. Dopo questo tempo il Sole discende sotto l' equatore, e da esso si allontana di più in più, finchè verso il 22 Dicembre ha acquistato una declinazione australe uguale in grandezza alla declinazione boreale del 21 di Giugno. La sua *AR* è allora 270°, e la sua declinazione australe varia da un giorno all' altro pochissimo, cosicchè sembra egli di nuovo stazionario, rapporto all' equatore. Principia quindi di nuovo ad avvicinarsi all' equatore, e la sua declinazione australe divenendo di giorno in giorno più piccola, si ritrova verso il 21 di Marzo di nuovo all' equatore donde partì, per riprincipiare il suo corso con lo stesso andamento nell' anno susseguente.

73. L' ipotesi più semplice che si possa fare sul moto del Sole è che egli descriva una curva piana rientrante. Per determinare in questa ipotesi la natura della trajettoria, principiamo dal determinare la posizione del piano, in cui essa giace relativamente all' equatore, la quale sarà totalmente determinata, quando si conosceranno le sue

intersezioni col piano dell' equatore, e la sua inclinazione al medesimo.

Per conoscere l'istante del passaggio del centro del Sole per l'equinozio di primavera, scegliamo dalle citate Effemeridi le seguenti osservazioni, le quali danno la posizione del Sole, quando si trovava nelle vicinanze dell' equatore al momento del suo passaggio pel meridiano di Milano, ossia al mezzodì vero di Milano.

1809	AR di ☼	Differ.	Declinaz. di ☼	Differ.
Marzo 20	359° 30′ 48″	54′ 35″	— 0° 12′ 40″	+ 23′ 41″
21	0 25 23	54 33	+ 0 11 1	23 40
22	1 19 56	54 31	+ 0 34 41	23 39
23	2 14 27		+ 0 58 20	

Si vede di qui che tanto le *AR*, quanto le declinazioni formano una serie algebraica con le differenze seconde costanti; sì le une che le altre passano per zero fra il giorno 20 ed il giorno 21 di Marzo; laonde il Sole passò per l'equinozio fra il 20 ed il 21 dello stesso mese.

Prendendo per primo termine della serie l'osservazione corrispondente al giorno 20, chiamando x il posto di un termine qualunque, y il termine corrispondente nella serie delle *AR* osservate, avremo $y = 359° 30' 48'' + Bx + Cx^2$, e facendo $x = 1, = 2$ si avranno per determinare i coefficienti B, C le due seguenti equazioni

$$B + C = 54' 35''; \qquad 2B + 4C = 109' 8'';$$

donde rilevasi $B = 54' 36''$; $C = -1''$.

Ora pel momento dell' equinozio, avendosi $y = 360°$, si otterrà per determinare x la seguente equazione $3276x - x^2 = + 1752''$, ossia prossimamente $x = 0,534886 = 12^h 50' 14''$.

Trovossi pertanto il Sole nell' equinozio il giorno 20 di Marzo a $12^h 50' 14''$ dopo il mezzodì vero al meridiano di Milano.

Si può trovare eziandio l'istante dell' equinozio dalle declinazioni osservate, ricercando il tempo, in cui la declinazione è = 0. Posto come sopra x il posto di un termine qualunque della serie delle declinazioni, ed y il termine stesso, si avrà dietro la natura delle serie algebriche $y = -12' 40'' + Bx + Cx^2$. Ponendo poi $x = 1$, $x = 2$ ed $y = + 11' 1''$, $= + 34' 41''$, si ottiene $B = 1421'',5$; $C = -0'',5$. Quindi fatto $y = 0$, si troverà il corrispondente valore di x da aggiungere al mezzodì del giorno 20 per ottenere il tempo del passaggio del Sole per l'equinozio. Fatto il calcolo si troverà $x = 0,534847 = 12^h 50' 11''$, e perciò l'istante dell' equinozio trovasi determinato dentro pochi secondi di tempo col mezzo delle declinazioni con uguale facilità e precisione che colle *AR*.

74. Non dobbiamo qui tralasciare d'osservare, che l'istante del passaggio del Sole per l'equinozio si può sempre ottenere dalla serie delle declinazioni osservate; non così facilmente dalla serie delle *AR*. In fatti egli è sempre facile osservare la declinazione del centro del Sole, nota essendo la latitudine geografica, e possedendo un quadrante murale, o un circolo per misurare le distanze degli astri dal zenit. Ma per osservare le *AR* del Sole convien aver prima regolato un orologio sul tempo siderco, e quindi convien conoscere esattamente l'*AR* di una determinata stella, la qual cognizione suppone già quella della posizione dell'equinozio. (§ 18. scol. I.). Egli è pertanto più semplice partire dalle osservazioni delle declinazioni in questa ricerca, se non si abbia un buon orologio regolato al tempo sidereo, ed un buon catalogo di stelle per regolarne l'andamento diurno.

75. Siamo ora anche in istato d'insegnare il modo di determinare l'*AR* di una stella, qualora siasi determinato il momento del passaggio del centro del Sole per l'equinozio mediante la serie delle declinazioni osservate. Supponiamo a tale oggetto, che siasi osservato non solo la distanza del Sole dal zenit per determinarne la declinazione, ma ad uno stromento di passaggi, e ad un orologio in modo regolato che segni $24^h\ 0'\ 0''$ fra due consecutivi passaggi di una medesima stella pel meridiano siasi notato il tempo, in cui tanto il centro del Sole, quanto una qualunque stella attraversano il meridiano. La differenza dei passaggi della stella e del Sole nel giorno 20 di Marzo sia $= t$. Sarà t ridotto in gradi a ragione di 15 gradi per ora la distanza del centro del Sole dalla stella valutata nell'equatore, ossia sarà la differenza fra l'*AR* della stella e del Sole. Siccome il Sole percorre nell'equatore un arco di $54'\ 35''$ fra il 20 ed il 21 di Marzo, così il 21 la stessa differenza sarà $= t - 54'\ 35''$. Quindi le differenze d'*AR* fra la stella ed il Sole saranno come segue

1809	Differ. di *AR* osservata
Marzo 20	t
21	$t - 54'\ 35''$
22	$t - 54\ 35 - 54'\ 33''$
23	$t - 54\ 35 - 54\ 33 - 54'\ 31''$

Si vede di qui, che le differenze d'*AR* fra la stella ed il Sole quali verrebbero osservate, costituiscono una serie algebrica di secondo ordine, di cui il termine generale sarà $y = t - 54'\ 36''\ x + 1''\ x^2$. Ora quando il Sole trovasi nell'equinozio, y è evidentemente l'*AR* cercata della stella. Trovandosi pertanto il Sole nell'equinozio quando $x = 0{,}534847$ (§ 73) sostituendo nel valore di y questo valore di x

si otterrà AR cercata $y = t - 1751'',8 = t - 29' \, 11'',8$. Conosciuta poi l'$AR$ di una sola stella si potranno sempre col mezzo di essa determinare le AR delle altre, come si è detto al cap. II (*).

(*) Dopo di avere esposto i metodi per determinare l'obbliquità dell'ecclittica e la posiziona dell'equinozio, non sarà inutile indicare come con tatta la precisione, di cui la osservazioni sono suscettibili, dedurre si possano le ascensioni rette di una o più stelle per riportarvi in seguito tutte la altre, avvagnachè il metodo esposto in questo numero non sempre così comodamente applicare si può alla pratica. Con molta precisione si ottengono le AR delle stelle confrontandole col Sole quando egli trovasi nelle vicinanze degli equinozi, e prendendo il medio dei risultamenti ottenuti dai confronti fatti verso l'equinozio di primavera, ed il successivo equinozio d'autunno, si avrà l'AR media dell'astro per il tempo del solstizio libera dai piccoli arrori che provenire potrebbero da un'incertezza nelle rifrazioni astronomicha, nella latitudine e nell'obbliquità dell'ecclittica. Ecco poi come stabilire dovremo gl'indicati confronti.

Siasi osservato per un giorno nelle vicinanze dell'equinozio di primavera il Sole nel meridiano, determinando la distanza del suo centro dal zenit, la quale, corretta dalla rifrazione a paralassa, sia $= z$, ed il suo passaggio ad un orologio regolato al tempo siderale; l'istante del passaggio del Sole pel meridiano in tempo dell'orologio ridotto in gradi sia $= t$. Del pari nella stessa giornata osservata la stella, supponiamo cha l'orologio notassa il tempo T ridotto esso pure in gradi.

La distanza del Sole dal zenit essendo $= z$, se per l indichiamo la latitudine, la declinazione sarà $= l - z$, e posta l'obbliquità data dalle tavole $= \varepsilon$ si calcolerà l'ascensione retta del Sole α colla formula $\text{sen}\,\alpha = \text{tang}\,(l - z) \cot \varepsilon$. Trovato α, sarà AR appar. della stella $= \alpha + T - t$. Applicando a questa ascensione retta le piccola correzioni dovute all'aberraziona e nutazione, delle quali tratteramo a suo luogo, si otterrà l'AR media della stella, la quale sarebbe esatta (facendo astrazione degli errori delle osservazioni in t, T, z, che in molti confronti si compensano) se tala fosse α.

Ponghiamo ora che α sia sottoposta ad una piccola incertezza dipendenta da un errore nella latitudine, nella rifraziona alla distanza z dal zenit, a nell'obbliquità dell'ecclittica. Se indichiamo per dl, dr a $d\varepsilon$ le correzioni di queste quantità, e per $d\alpha$ la correzione che na risulta pel valora di α, si atterrà $d\alpha$ differenziando l'equazione $\text{sen}\,\alpha = \text{tang}\,(l - z) \cot \varepsilon$, che sarà perciò così espresso
$d\alpha \cos \alpha = \dfrac{dl - dz}{\cos^2 (l - z)} \cot \varepsilon - \dfrac{\text{tang}\,(l - z)\, d\varepsilon}{\text{sen}^2 \varepsilon}$. Supponendo che nella distanza z non siavi altro errore che quello proveniente dall'incertezza delle rifrazioni, dovremo porre $dz = dr$, e perciò avremo

$$AR \text{ di stella} = \alpha + T - t + \frac{dl - dr}{\cos^2 (l - z)} \, \frac{\cot \varepsilon}{\cos \alpha} - \frac{\text{tang}\,(l - z)}{\text{sen}^2 \varepsilon \cos \alpha} \, d\varepsilon + m,$$

m indicando la somma delle correzioni dovute alle aberrazioni e nutazioni.

Se ora sarassi osservata la distanza del Sole dal zenit nelle vicinanze dell'altro equinozio, e particolarmente quando era presso a poco uguale all'osservata nel primo aquinozio, e se ne sarà del pari dedotta dietro la data obbliquità ε l'AR del Sole, indicando per α', t', T', z', m' le quantità in questa seconda osservazione corrispondenti ad α, t, T, z, m, si avrà del pari (osservando essere $dz' = dr$)

$$AR \text{ di stella} = \alpha' + T' - t' + \frac{dl - dr}{\cos^2 (l - z')} \, \frac{\cot \varepsilon}{\cos \alpha'} - \frac{\text{tang}\,(l - z')}{\text{sen}^2 \varepsilon \cos \alpha'} \, d\varepsilon + m'.$$

Queste due differenti determinazioni daranno nelle due epoche l'AR della stella riferita all'equinozio medio, la loro semisomma porgerà l'AR della stella rapporto al-

76. Dopo questa breve digressione ritorniamo al moto del Sole. Avendo determinato i punti, nei quali l'ecclittica taglia l'equatore, ed il tempo, in cui il Sole trovossi negli equinozj, possiamo determinare l'inclinazione del piano dell'ecclittica all'equatore.

Egli è evidente, che prolungando il piano dell'ecclittica fino al cielo stellato, genera ivi un circolo massimo della sfera, il quale fa con l'equatore un angolo uguale alla cercata inclinazione. Ora la misura di quest'angolo uguaglia la massima declinazione del Sole, la quale ha luogo quando l'*AR* del medesimo è $= 90$. Per trovare l'inclinazione dell'ecclittica all'equatore, convien pertanto determinare delle declinazioni osservate la massima, che ebbe luogo verso il 21 di *Giugno*. Ecco come procederemo

1809	Declinaz. bor.	Diff. 1.	Diff. 2.
Giugno 20	23° 27′ 18″	+ 23″	
21	23 27 41	— 2	— 25
22	23 27 39	— 26	— 24
23	23 27 13	— 51	— 25
24	23 26 22		

Apparisce di qui, che le declinazioni osservate formano una serie algebrica a differenze seconde costanti, giacchè il piccolo salto di 1″, che si osserva, è dovuto all'avere omesso le decime di secondo nelle declinazioni. Il termine generale della serie si troverà espresso (partendo dall'osservazione corrispondente al giorno 20) da

$$y = 23^\circ\ 27'\ 18'' + 35'',5\ x - 12'',5\ x^2.$$

Il massimo valore di y ricavato da questa equazione sarà la cercata declinazione. Ponendo pertanto $\frac{dy}{dx} = 0$ si ricaverà $x = 1,42$. Quindi il massimo valore di y sarà $= 23^\circ\ 27'\ 43'',2$. Tale era appunto l'ob-

l'equinozio medio per l'epoca media fra le due osservazioni, la quale quando le distanze del Sole dal zenit sono uguali, cade nel giorno del solstizio, e quando poco differiscono dall'eguaglianza, è a quello vicinissima. Quando $z = z'$ è evidente che $\alpha + \alpha' = 180°$; e perciò $\cos\alpha = -\cos\alpha'$. Segue di qui, che nella semisomma i termini dipendenti da dr, dl, $d\epsilon$ svaniscono, o sono trascurabili quando $\alpha + \alpha'$ poco differisce da 180°.

Questo vantaggio unito a quello della gran precisione, con cui α, α' possono determinarsi nella vicinanze degli equinozj col mezzo di z, z', le cui giornaliere variazioni sono le più forti, rende questo metodo esattissimo e pregevolissimo. In tal guisa i celebri astronomi Maskeline e Piazzi hanno determinato la posizione di alcune principali stelle, che hanno servito a quest'ultimo di base al suo grande catalogo; opera la più perfetta de' nostri giorni, e che renderà sempre celebre fra gli Astronomi il nome del suo Autore.

bliquità apparente dell' eeclittiea. Il Sole ebbe la massima declinazione il giorno 20 + 1,42 di Giugno, ossia il 21 a 10h 4' 48'' dopo il mezzogiorno di Milano.

Si troverà del pari che la massima declinazione australe del Sole ebbe luogo verso il 22 di Dicembre, e fu uguale alla massima declinazione boreale.

Quei punti nei quali la declinazione del Sole cessa di aumentare chiamansi *solstisj*, appellandosi il primo *solstizio estivo*, ed il secondo *solstizio jemale*.

I paralelli all' equatore percorsi dal Sole nel giorno del solstizio in virtù del moto diurno si chiamano *tropici*, e dicesi *tropico del cancro* quello che vien percorso dal Sole nel giorno del solstizio estivo; *tropico del capricorno* quello che è percorso nel giorno del solstizio jemale. Sono adunque i tropici due circoli minori della sfera distanti dall' equatore di 23° 28' in circa, oltre i quali il Sole non è giammai trasportato in virtù del suo moto annuo.

L' angolo dell' ecclittica coll' equatore poco fa determinato chiamasi *obbliquità dell' ecclittica*. Un circolo massimo della sfera celeste condotto per i poli dell' equatore, e per i due equinozii appellasi *coluro degli equinozii*, mentre il circolo condotto per i poli dell' equatore e dell' ecclittica il quale passa necessariamente anco per i punti solstiziali chiamasi *coluro dei solstizii*.

La circonferenza dell' ecelittica a partire dall' equinozio di primavera (secondo l' uso introdotto da antichissimi tempi) dividesi in dodici parti uguali appellate *segni*, ciascheduno dei quali abbraccia un arco di 30°, e di essi si fa uso per denotare le longitudini. Così una longitudine di 166° 20' corrisponde a 5 16° 20'. Una zona della sfera racchiusa fra due paralelli all' ecclittica situati ad uguali latitudini boreale ed australe di 9° circa, chiamasi *zodiaco*, e le stelle in essa comprese diconsi *stelle zodiacali*, le quali sono state dagli Astronomi con molta diligenza osservate e determinate, perchè i pianeti antichi (come s' indicherà a suo luogo) nei loro movimenti intorno al Sole non sortono dalla fascia zodiacale. Le stelle zodiacali furono fino dagli antichissimi tempi ridotte a dodici costellazioni o gruppi comprendenti ciascuno un arco di ecclittiea uguale a circa 30°, ai quali si attribuirono i nomi ed i simboli seguenti: 1.° *Ariete* ♈, 2.° *Toro* ♉, 3.° *Gemelli* ♊, 4.° *Cancro* ♋, 5.° *Leone* ♌, 6.° *Vergine* ♍, 7.° *Libra* ♎, 8.° *Scorpione* ♏, 9.° *Sagittario* ♐, 10.° *Capricorno* ♑, 11.° *Aquario* ♒, 12.° *Pesci* ♓. Allorquando fu introdotto l' uso di queste costellazioni, l' equinozio di primavera corrispondeva al principio di Ariete, e le longitudini s' indicavano coi nomi dei segni; così la superiore longitudine corrisponderebbe a 16° 20' della Vergine. La precessione degli equinozii, di cui parleremo fra poco, ha trasportato ai nostri

giorni l'equinozio verso il principio della costellazione dei Pesci, e tuttavia si ritiene da alcuni l'antico metodo di denotare le longitudini coi nomi dei segni zodiacali. Non conviene pertanto confondere i segni zodiacali e le costellazioni: quelli devonsi riguardare come nomi particolari dati alle dodici parti del zodiaco: queste come gruppi di stelle determinati, pei quali retrocedendo l'equinozio passa successivamente con moto lentissimo.

77. Stabilita così la posizione del piano, in cui abbiamo supposto compresa l'orbita rientrante del Sole, convien vedere se essa soddisfa a tutte le altre osservazioni intermedie. A tale oggetto (*fig.* 19) sia BAE l'equatore celeste, B l'equinozio di primavera, da cui si numerano le AR nell'equatore, e le longitudini nell'ecclittica, BCF sia l'ecclittica, come è stata determinata nei §§ antecedenti. Posta l'AR del Sole in un giorno qualunque dell'anno $= BA = \alpha$, e l'angolo $B = \iota$, sarà $\tang AC = \tang \iota \operatorname{sen} \alpha$. Se dunque il Sole trovasi effettivamente nel piano del circolo BCF, la sua declinazione osservata dovrà allora coincidere con la quantità AC calcolata dalla precedente equazione. Verificandosi questa coincidenza dentro limiti assai ristretti prova che il Sole si muove presso a poco nel piano dell'ecclittica. Le minime aberrazioni che vi si scuoprono in parte dipendono dagli inevitabili errori delle osservazioni, ed in parte da alcune piccole alterazioni, delle quali la spiegazione appartiene alla meccanica celeste; sono esse però così piccole, che si possono in una prima approssimazione trascurare.

78. Se si determina la posizione dell'equinozio nell'equatore rapporto ad una stella fissa, e l'obbliquità dell'ecclittica in due epoche lontanissime, differenti fra loro per esempio di 100 anni, si avrà occasione di rimarcare, che non sono esse coincidenti; ma che l'AR della stella e la declinazione hanno variato, come anche avrà variato l'obbliquità dell'ecclittica. Quanto alla variazione dell'obbliquità dell'ecclittica, essa diminuisce pressochè proporzionalmente al tempo. Confrontando le osservazioni antiche con le moderne, si è trovato la diminuzione dell'obbliquità dell'ecclittica di $52''$ per 100 anni, ossia di $0'',52$ per ogni anno. Oltre questa costante diminuzione progressiva, essa è sottoposta ad alcune altre piccole oscillazioni, delle quali parleremo in seguito. La teoria di questi movimenti e di queste oscillazioni appartiene alla meccanica celeste, e in essa si dimostra, che la diminuzione successiva dell'obbliquità andrà diminuendo a segno che collo svolgersi dei secoli si cangerà in aumento.

Per quanto poi riguarda la variazione progressiva osservata nelle AR e nelle declinazioni delle stelle, si deve prima di tutto notare, che rapporto ad una medesima stella queste variazioni sono presso a poco proporzionali ai tempi, ma variano sensibilmente da una stella

ad un' altra. Se però di diverse stelle si determinano in due epoche molto fra loro lontane le *AR* e le declinazioni, e mediante queste colle formule esposte al cap. IV si calcola per le medesime epoche la loro longitudine e la loro latitudine, si troverà 1.° che le latitudini sono rimaste presso a poco costanti; 2.° che le longitudini hanno tutte aumentato di una eguale quantità, la quale in 100 anni è circa $5025'' = 1° \; 23' \; 45''$, ossia le longitudini tutte delle stelle aumentano di $50'',25$ circa per ogni anno. Quest' aumento progressivo delle longitudini delle stelle fisse è combinato con alcuni altri piccoli movimenti periodici, dei quali tratteremo in un capitolo apposito nel secondo volume. Frattanto non avendo riguardo che a questo moto progressivo delle stelle in longitudine, egli è evidente che vien esso bene rappresentato, se supponiamo che le stelle restano fisse rapporto al piano dell' ecclittica, e che invece l' equinozio, da cui le longitudini sono contate, si allontani retrocedendo da esse annualmente di $50'',25$, poichè allora le longitudini tutte saranno indistintamente di altrettanto aumentate, e le latitudini rimarranno invariabili. Egli è poi evidente, che per un aumento costante dato alle longitudini, le *AR* e le declinazioni riceveranno delle variazioni irregolari e diverse, secondo la diversa posizione delle stelle. In fatti se nelle formule del probl. IV del cap. IV si pone $d\,l = 50'',25$; $d\,\lambda = 0$, avremo (ritenendo le denominazioni assunte in quel capitolo)

$$d\,\alpha = \frac{\cos S \cos \lambda}{\cos \delta}\, 50'',25 = 50'',25 \cos \epsilon + 50'',25 \operatorname{sen} \epsilon \operatorname{tang} \delta \operatorname{sen} \alpha \, ;$$

$$d\,\delta = \operatorname{sen} S \cos \lambda \; 50'',25 = 50'',25 \operatorname{sen} \epsilon \cos \alpha \, .$$

In questo secolo si può porre $\epsilon = 23° \; 28'$, ed allora i valori di $d\,\alpha$ e di $d\,\delta$ diverranno

$$d\,\alpha = 46'',09 + 20'',01 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \delta \, ; \quad d\,\delta = 20'',01 \cos \alpha \, ,$$

le quali due equazioni ci danno l' aumento annuo delle *AR*, e delle declinazioni delle singole stelle dovuto all' aumento comune delle longitudini.

La quantità, di cui l' equinozio va annualmente retrocedendo lungo l' ecclittica, è dagli Astronomi appellata *precessione degli equinozj*, la quale fu conosciuta anche dai più antichi osservatori. Sulla sua quantità media non sono esattamente d' accordo gli Astronomi, e riserbandoci ad esaminare più da vicino l' indole di questi moti progressivi, riportandoli ad un piano fisso, riferiremo le formule numeriche adottate dal celebre Piazzi nel suo catalogo nuovamente pubblicato a Palermo nell' anno 1814, le quali sono le seguenti

$$d\,\alpha = 46'',0395 + 20'',0642 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \delta \, ; \quad d\,\delta = 20'',0642 \cos \alpha \, .$$

La teoria dell' attrazione universale indicando l' origine di questi movimenti, dimostra che la precessione degli equinozii non si può

assumere esattamente proporzionale ai tempi per le epoche lontanissime, ma conviene eziandio introdurvi dei termini dipendenti dalle potenze superiori del tempo. Trattando dei piccoli movimenti delle fisse ritorneremo su questo argomento. Termineremo ora questo paragrafo coll'osservare, che nei cataloghi di *AR* e di declinazione delle stelle si pongono le loro *AR* e le loro declinazioni, quali si osservavano, o osservare si dovevano ad un'epoca determinata, per esempio al principio del 1800, ed a lato vi si pongono i valori di $d\alpha$ e di $d\delta$ ricavati dalle formule superiori, sotto il titolo di *precessione annua in* AR, *precessione annua in declinazione;* se alle posizioni delle stelle per l'epoca indicata si aggiungono le loro variazioni moltiplicate pel numero degli anni, e parti d'anno trascorse fra l'epoca del catalogo, e l'epoca per la quale istituiscesi il calcolo, si ottengono le posizioni delle stelle fisse per il dato tempo, le quali, dovendo ancora essere corrette da alcuni altri piccoli movimenti periodici, si appellano *posizioni medie*, mentre quelle che realmente hanno luogo dopo fatte tutte le correzioni, delle quali parleremo a suo luogo, si chiamano *posizioni vere o apparenti*.

CAPITOLO VI.

Continuazione della teoria del Sole. Teoria del moto elittico.

79. Dopo d'aver determinato la posizione del piano dell'orbita solare rapporto all'equatore, ed insegnato il modo di assegnare il tempo, in cui il Sole ritrovasi e negli equinozj e nei solstizj, passiamo ad indicare come determinar si possa, mediante le osservazioni, la natura della curva da esso descritta.

Pongasi a tale oggetto che il nostro osservatore dalle *AR* e dalle declinazioni osservate abbia giornalmente dedotta la longitudine del Sole, ed abbia al tempo stesso giornalmente osservato il diametro solare apparente quando trovasi nel meridiano. Da un attento esame delle sue osservazioni raccoglierà le seguenti conseguenze:

1.° Il Sole si muove nel piano dell'ecelittica costantemente da occidente verso oriente, e ad occhio nudo sembra nel cielo stellato descrivere un circolo intorno alla terra avanzandosi in quello giornalmente di circa un grado. 2.° Il numero dei giorni fra due passaggi consecutivi del Sole per il medesimo equinozio è costante. 3.° Il moto del Sole nel piano dell'ecelittica si fa per modo che la sua velocità giornaliera angolare non è costante (intendendosi per velocità angolare la quantità di cui giornalmente vanno aumentando le

longitudini del Sole, ossia le differenze delle successive longitudini osservate giornalmente). Questa velocità va ora aumentando, ed ora diminuendo. Si osserva poi particolarmente, che la sua velocità angolare è massima verso il solstizio d'inverno, minima verso il solstizio d'estate; nelle vicinanze degli equinozj la velocità diurna è media aritmetica fra la massima e la minima delle velocità. La massima velocità angolare del Sole è = 61′ 12″,4, ed ha luogo verso il principio di Gennajo; la minima è = 57′ 13″,6, ed ha luogo verso la fine di Giugno. I punti del cielo stellato, ai quali corrisponde il Sole all'epoca della massima e minima velocità, differiscono in longitudine di 180°, ossia sono in linea retta col centro della terra. La velocità media del Sole è = 59′ 13″,0, ed il Sole ha tal velocità in punti del cielo all'incirca diametralmente opposti fra loro, e distanti di circa 90° in longitudine dai punti della massima e minima velocità.

4.° Il quarto fenomeno che ci aprirà la strada a scuoprire i rapporti delle distanze della terra dal Sole è la variazione del suo diametro. Esso varia al pari della velocità, ed in modo che allorquando il Sole ha la massima velocità angolare, il diametro apparente è eziandio il più grande, e giunto il Sole al punto della sua minima celerità, il suo diametro apparente è pure il più piccolo che osservisi nell'anno. Mentre poi il Sole gradatamente passa dalla massima celerità alla minima, il suo diametro apparente passa pure gradatamente dal massimo al minimo, ed ha una grandezza media fra queste due presso a poco in quei punti (*) del cielo stellato, ove il Sole ha la media celerità.

80. Esposti questi fenomeni di osservazione, passiamo a vedere le consegnenze che ne derivano.

Coroll. I. Il Sole non conserva sempre la medesima distanza dalla terra; trovasi ad essa più vicino nel mese di Gennajo, in cui il diametro osservato è massimo, e più lontano nel mese di Giugno, in cui il diametro solare è minimo. È principio noto nell'ottica che le distanze assolute di un oggetto dal nostro occhio sono in ragione inver-

(*) I punti nei quali ha luogo il diametro medio sono essenzialmente diversi da quelli della media celerità. Sia in fatti g la distanza media, r la minima, R la massima del Sole dalla terra, δ il diametro corrispondente alla media distanza, d il minimo, D il massimo. Si ha, dietro i principj d'ottica $r : R :: d : D$, onde $R = \frac{rD}{d}$; ma si ha $g = \frac{1}{2}(r + R) = \frac{r(d + D)}{2d}$. Per altra parte sta $r : g :: \delta : D$, onde $\frac{g}{r} = \frac{D}{\delta}$. Quindi otterremo $\delta = \frac{2dD}{d + D} = \frac{1}{2}(d + D) - \frac{(D - d)^2}{2(D + d)}$. Apparisce di qui essere sempre $\delta < \frac{1}{2}(D + d)$, vale a dire il diametro osservato nelle medie distanze minore del diametro medio assoluto.

sa degli angoli che vi sottende. Chiamando pertanto D, d i diametri apparenti massimo e minimo, R, r le distanze massima e minima del Sole dalla terra, avremo $\frac{D}{d} = \frac{R}{r}$, la quale equazione ci dà tosto il rapporto fra le distanze R ed r. Ora il massimo diametro del Sole dietro l'osservazione è $= 1955'',6$, il minimo poi è $= 1891'',0$. Quindi $\frac{R}{r} = \frac{1955'',6}{1891'',0} = 1,034162$. Posto quindi $r = 1$, sarà $R = 1,034162$.

La media aritmetica fra queste due distanze viene appellata in Astronomia *distanza media* del Sole dalla terra. Essa è $= 1,017081$, quando la distanza minima è presa per unità.

Coroll. II. Siccome i diametri del Sole vanno gradatamente con molta regolarità diminuendo dal massimo fino al minimo loro valore per tornare quindi ad aumentare per gli stessi gradi fino al massimo, così le distanze andranno regolarmente crescendo fino alla massima, quinci diminuendo, sempre però mantenendosi fra quei limiti che abbiamo loro assegnato.

Avendo osservato in un qualunque giorno dell'anno il diametro apparente del Sole, si avrà per quel giorno la sua distanza dalla terra colla proporzione $r : r' :: d' : D$, essendo r' la distanza cercata, d' il diametro osservato; onde $r' = \frac{rD}{d'} = \frac{1955'',6}{d'}$. Da tutto ciò risulta, che descriverà il Sole nel piano dell'ecclittica una curva rientrante, i di cui punti saranno alternativamente più vicini e più lontani dal centro della terra. Posto ciò, attendasi bene alle seguenti definizioni.

Chiamasi *perigeo* quel punto dell'orbita solare, a cui corrisponde la minima distanza del Sole dalla terra; *celerità perigea* la velocità angolare del Sole nel perigeo; *longitudine del perigeo* l'arco dell'ecclittica compreso fra questo punto e l'equinozio.

Chiamasi *apogeo* quel punto dell'orbita solare, a cui corrisponde la massima distanza alla terra; *longitudine dell'apogeo* è l'arco dell'ecclittica compreso fra esso e l'equinozio di primavera; *celerità apogea* è la velocità angolare del Sole nell'apogeo.

Si riconosce nel cielo stellato la posizione del perigeo e dell'apogeo osservando la longitudine del Sole, quando egli ha il massimo ed il minimo diametro, ossia quando ha la massima e minima celerità angolare.

Coroll. III. Essendo il moto giornaliero del Sole massimo col diametro, e minimo con il medesimo, ed in generale variando con esso, ne segue che nella sua velocità vi è una variazione dipendente dalla distanza. Ma non si sa per anche se questa sia reale od apparente.

Se il Sole avesse sempre una stessa velocità assoluta nello spazio, qualunque fosse la sua distanza dalla terra, dovrebbero le sue celerità angolari da noi osservate variare in ragione inversa delle distanze. Chiamando pertanto v la velocità angolare del Sole nel perigeo; v' la velocità apogea; r la distanza del Sole nel perigeo; R la sua distanza apogea, dovrebbe essere in questa ipotesi $v : v' :: R : r$, e quindi $v' = \frac{r}{R} v$. Laonde ponendo, come sopra si è trovato, $r = 1$; $R = 1,034162$; $v = 61' \, 12'',4$; risulta $v' = 59' \, 11'',1$. Se pertanto la celerità assoluta del Sole nello spazio fosse costante, la velocità apogea del Sole dedotta dalla perigea osservata sarebbe $= 59' \, 11'',1$. Ma invece essa si trova dietro l'osservazione uguale a $57' \, 13'',6$; havvi dunque nel moto del Sole una diminuzione nella sua celerità assoluta mentre dal perigeo passa all'apogeo, in virtù della quale non si può assumere $v' = \frac{rv}{R} = \frac{v}{R}$. Che se si dividesse v per R^2 si otterrebbe la vera celerità apogea. Che anzi dividendo la celerità perigea per il quadrato della distanza del Sole dalla terra in qualunque siasi giorno dell'anno, si trova precisamente la velocità angolare osservata in quel giorno. Quindi indicando per u la celerità angolare diurna in qualunque giorno dell'anno, e per g la sua distanza corrispondente, sarà $u = \frac{v}{g^2}$, donde risulta $g^2 u = v =$ costante.

Ora supponendo che l'arco descritto dal Sole in un giorno si confonda con un arco di circolo di raggio g, nel che pochissimo ci allontaneremo dal vero, essendo le variazioni delle distanze piccolissime, la quantità $g \, v$ rappresenta il doppio dell'area percorsa dal raggio vettore. Risulta di qui *che il Sole si muove intorno alla terra in una curva piana rientrante in modo, che le aree percorse dal raggio vettore siano giornalmente le stesse, e più generalmente le aree descritte dal raggio vettore saranno proporzionali ai tempi impiegati a descriverle*.

81. Abbiamo ora tutti i dati necessarj per costruire la trajettoria. Costruendola per punti si è osservato, che essa ha una perfetta analogia coll'ellisse, di cui l'asse maggiore sia uguale 2,034162; un foco è occupato dalla terra, e la distanza de' fochi = 0,034162; di modo che la sua eccentricità è = 0,017081.

Questi numeri suppongono la distanza perigea = 1. Gli Astronomi assumono il semiasse maggiore per unità di misura, e danno ad esso il nome di distanza media. Sarà in questo caso

semiasse maggiore . . . . = 1
distanza perigea . . . . . = 0,98321
distanza apogea . . . . . = 1,01679
eccentricità . . . . = 0,01679.

Chiamando in generale a la distanza media, e l'eccentricità dell'ellisse, A l'angolo che un qualunque raggio vettore fa coll'asse maggiore a partire dal perigeo, ed r lo stesso raggio vettore, l'equazione dell'ellisse dà $r = \frac{a(1-e)}{1+e\cos A}$, nella quale sostituendo i valori di a, e, A dati dall'osservazione, si trova il valore di r dato dall'osservazione dei diametri solari, il che serve di conferma alla congettura fatta sulla natura della trajettoria descritta dal Sole.

Siamo pervenuti in tal guisa nel modo più semplice a scuoprire le leggi del moto del Sole, dimostrando che la trajettoria da esso descritta è un'ellisse situata in un piano inclinato all'equatore di circa 23° 28, e che la sua velocità angolare in essa varia per modo che le aree percorse dal raggio vettore restano sempre le stesse.

Avendo frattanto scoperto la posizione dell'orbita solare, ed i suoi parametri a un di presso, ci rimane a dare i metodi per determinarli dietro le osservazioni con tutta la precisione, il che faremo nei seguenti problemi.

Problema I. Determinare esattamente la lunghezza dell'anno, ossia il tempo trascorso fra due consecutivi passaggi del Sole per l'equinozio.

82. Si può essa ottenere in diverse maniere. La più semplice si è di confrontare fra loro i ritorni del Sole ad uno stesso equinozio. Confrontando così le osservazioni antiche colle moderne si è trovata la lunghezza dell'anno di $365^g\ 6^h$ circa, o più esattamente di $365^g\ 5^h\ 48'\ 50'',2 = 365^g,24225$. Un tal numero di giorni rappresenta il tempo che impiega il Sole a partire da un equinozio, e ritornarci, al qual tempo gli Astronomi danno il nome di *rivoluzione tropica*.

Coroll. Se con moto uniforme percorresse il Sole l'ecclittica, in allora la quantità, di cui si avanzerebbe giornalmente nel cielo stellato sarebbe $= \frac{360°}{365,24225} = 0°\ 59'\ 8'',33$. Tale quantità chiamasi dagli Astronomi *moto medio diurno* del Sole.

Partendo il Sole dall'equinozio, dopo un numero t di giorni si sarebbe da esso nell'ecclittica allontanato di un arco $= (59'\ 8'',33)\ t$, alla qual quantità si dà il nome di *longitudine media*.

Parimente se fingiamo un altro Sole, il quale contemporaneamente partendo dall'equinozio percorra l'equatore celeste nello stesso tempo, vale a dire in $365^g,24225$, dopo un numero t di giorni avrà per-

corso un arco d' equatore $= (59' 8'', 33)\, t$, alla quale quantità si dà il nome di *ascensione retta media* del Sole. Sono pertanto uguali l'*AR media* e la *longitudine media* del Sole, e crescono ambedue proporzionalmente al tempo; conoscendo il momento del passaggio del Sole per l' equinozio di primavera, se ne potrà sempre assegnare il valore ad un qualunque altro tempo.

Scolio I. Non convien però credere che il Sole impieghi precisamente $365^g\, 5^h\, 48'\, 50'', 2$ a compire la sua rivoluzione annua intorno al cielo stellato, non essendo il tempo da noi determinato altro che la differenza fra due suoi successivi passaggi per l' equinozio. Sarebbe compita la rivoluzione del Sole nel cielo stellato, se l' equinozio fosse fisso; ma convien rammentarsi, che (§ 78) l' equinozio retrocede tutti gli anni di circa $50'', 25$; pertanto quando è ritornato all' equinozio deve ancora percorrere quell' arco, di cui ha questo retroceduto per compire l' intera rivoluzione celeste rapporto ad una stella fissa, alla quale durata gli Astronomi danno il nome di *rivoluzione siderea* o *siderale* del Sole. Chiamando T la durata della rivoluzione tropica; m il moto dell' equinozio pel tempo T, S la durata della rivoluzione siderea, avrà luogo la seguente proporzione $360^\circ - m : 360^\circ : T : S$, onde $S = T\dfrac{360}{360 - m} = T\left(1 + \dfrac{m}{360} + \dfrac{m^2}{360^2} + \text{ec.}\right)$, e fatto $m = 50'', 25 = 0^\circ, 01396$, si troverà $S = 365^g, 25641$, ossia $S = 365^g\, 6^h\, 9'\, 13'', 82$. Quindi la durata della rivoluzione siderale del Sole è $20'\, 23'', 6$ più lunga della sua rivoluzione tropica.

Scolio II. Il confronto diretto di due equinozj osservati in due epoche molto rimote non porge, a vero dire, la lunghezza dell' anno medio, quale abbiamo riferito di sopra, ma bensì una quantità a quella molto vicina, che appellasi *lunghezza apparente dell' anno*, da cui con somma facilità deducesi poi la lunghezza vera. La ragione di questa differenza deve ripetersi dal movimento successivo dell' apogeo, di cui parleremo nel seguente problema, e da alcune piccole ineguaglianze, alle quali sono sottoposte le longitudini del Sole dipendenti dall' attrazione dei pianeti; donde accade che essendo il Sole nell' equinozio, la sua longitudine media non è la stessa nelle due epoche insieme confrontate, e perciò essa non ha percorso un numero di circonferenze esatto fra le due osservazioni. Dividendo quindi l' intervallo espresso in giorni per il numero degli anni interi trascorsi, non si ha la vera durata media dell' anno, quale avrebbe luogo se il suo moto fosse uniforme ed uguale al medio. Per ottenere pertanto la lunghezza media dell' anno si calcoleranno le equazioni del centro, e le perturbazioni per l' istante delle osservazioni, ed applicate queste con contrario segno alla longitudine osservata, che è $= 0^\circ\, 0'\, 0''$, si formeranno le lon-

gitudini medie corrispondenti, la differenza delle quali (avuto il debito riguardo alle circonferenze intere percorse) divisa per il numero dei giorni trascorsi darà il moto diurno medio, donde facilmente deducesi la durata dell'anno. Per ottenere una formula semplice, che sia di guida al calcolatore, sia il numero intero degli anni decorsi fra le due osservazioni $= n$; l'intervallo di tempo corrispondente espresso in giorni e parti di giorno $= t$; $- k$, $- k'$ siano le quantità che devonsi applicare alle longitudini osservate nelle due epoche, per passare alle corrispondenti longitudini medie, le quali si calcoleranno coi precetti che verranno esposti nei seguenti problemi, ovvero si prenderanno da una tavola dei moti solari.

L'angolo vero percorso dal Sole nell'intervallo delle due osservazioni espresso in gradi sarà $= 360\, n$. La differenza delle due longitudini medie sarà $= 360\, n - k' + k$, e però il moto diurno medio sarà $= \frac{360\, n + k - k'}{t}$, e quindi facilmente otterrassi la lunghezza dell'anno tropico da $T = \frac{360\, t}{360\, n + k - k'}$.

Siccome la quantità $k - k'$ contiene quasi sempre un piccolo numero di minuti secondi, così si potrà svolgere in una serie convergentissima, i cui primi termini, supponendo $k - k'$ ridotto in secondi, daranno $T = \frac{t}{n}\left(1 - \frac{k - k'}{1296000\, n} + \frac{(k - k')^2}{(1296000\, n)^2}\right)$. Il primo termine porge direttamente la lunghezza dell'anno apparente; il secondo termine, che solo è sensibile dà la riduzione dell'anno apparente all'anno medio, espressa in parti di giorno. Che se vorrassi espressa in secondi di tempo si troverà essa $= -\frac{(k - k')}{15\, n}\,\frac{t}{n} = -24{,}35\,\frac{k - k'}{n}$ a motivo di $\frac{t}{n} = 365{,}25$ prossimamente.

La lunghezza dell'anno così calcolata dipende dall'istante dell'equinozio, e quindi è sottoposta agli errori inevitabili delle osservazioni. Se l'equinozio sia stato dedotto dalle distanze del Sole dal *zenit*, sarà sottoposto all'errore della latitudine, della rifrazione all'altezza dell'equatore, e dell'obbliquità, i quali tutti si compenseranno, prendendo il medio della lunghezza dell'anno derivata dall'osservazione degli equinozj di primavera e di autunno osservati nel medesimo luogo, il che dimostrasi con un ragionamento analogo a quello fatto nella nota al num. 75.

Problema II. Determinare la posizione del perigeo e dell'apogeo dell'orbita solare.

83. Si può essa ottenere in due modi: od osservando i punti, nei quali il Sole ha il massimo e minimo diametro, ovvero osservando i punti, nei quali egli ha la massima e minima celerità. Le longitudini di tali punti danno nel cielo stellato la posizione del perigeo ed apogeo solare.

Questo metodo per altro non è suscettibile di tutta la precisione, giacchè nelle vicinanze del perigeo e dell'apogeo i diametri e le velocità angolari del Sole variano pochissimo da un giorno all'altro. Più esatto riesce l'altro metodo praticato dagli Astronomi, il quale consiste in cercare due punti che siano al tempo stesso in linea retta col centro della terra, e differiscano fra loro di mezza rivoluzione.

(*Fig.* 20) Rappresenti ♈AP l'ecclittica, ♈ il punto da cui si contano in essa le longitudini. Sia $EBMN$ l'ellisse percorsa dal Sole nel piano dell'ecclittica in virtù del suo moto annuo, T il foco di essa occupato dalla terra, EN l'asse maggiore che divide l'orbita in due parti uguali. Essendo i tempi proporzionali alle aree, sarà il tempo impiegato dal Sole a pervenire da E in N uguale ad una mezza rivoluzione, e nel tempo stesso le longitudini A♈ e PA♈ dell'apogeo e perigeo dovranno fra loro differire di 180°. Posto ciò, siausi osservate nelle vicinanze dell'apogeo e del perigeo le longitudini del Sole, mentre egli trovavasi in B ed in M, ed il tempo preciso, a cui corrispondevano tali longitudini. Sia cioè

la longitudine del Sole in B data dall'osservazione $= L$

in M . . . . $= L'$.

L'angolo $BTE = x$, $MTN = y$. La celerità angolare diurna del Sole nelle vicinanze dell'apogeo E data dall'osservazione $= m$; quella nelle vicinanze del perigeo $N = m'$; il tempo della rivoluzione tropica $= T$; e sia t il tempo impiegato a venire da B in M. Avranno luogo le seguenti due equazioni

$$L' - L + x + y = 180°; \quad t + \frac{x}{m} + \frac{y}{m'} = \tfrac{1}{2} T,$$

dalle quali si avranno i valori di x e di y. Tolto poi x dalla longitudine del Sole in B si avrà la longitudine dell'apogeo, ed aggiunto y alla longitudine osservata del Sole in M, si avrà la longitudine del perigeo rapporto all'equinozio.

Coroll. I. Determinato il luogo dell'apogeo per due diverse epoche molto fra loro lontane, si è trovato che non corrisponde sempre alla stessa longitudine rapporto agli equinozj; laonde egli ha un moto annuo rapporto agli stessi. Così dalle osservazioni del Flamstedio fatte nel 1690 risulta la longitudine dell'apogeo di 97° 35′ 0″, e dalle osservazioni di Maskeline del 1780 risulta la sua longitudine di 99° 8′ 20″. La longitudine dell'apogeo aumentò pertanto in 90 anni di 1° 33′ 20″,

il che corrisponde ad un aumento annuo di 62",22. Ora siccome le longitudini delle stelle aumentano annualmente di 50",2 a motivo della precessione degli equinozj, l'apogeo ha un movimento diretto verso oriente nel senso stesso del moto del Sole, in virtù di cui annualmente si allontana dalle stelle fisse di 12",0.

Coroll. II. Il tempo impiegato dal Sole a ritornare all'apogeo vien chiamato dagli Astronomi *rivoluzione anomalistica*. Essa è un poco più lunga della rivoluzione siderale, giacchè essendo il Sole ritornato al punto del cielo stellato, a cui corrispondeva nel principio della rivoluzione l'apogeo, gli resta ancora da percorrere un arco di 12" circa per raggiungerne la nuova posizione. Detta A la rivoluzione anomalistica, m l'avanzamento dell'apogeo nel tempo S di una rivoluzione siderale, sarà $\frac{mA}{S}$ il suo avanzamento nel tempo A; perciò compiendosi la rivoluzione anomalistica quando il Sole abbia percorso l'angolo $360 + \frac{mA}{S}$ intorno alla terra, avremo la proporzione $360 : S :: 360 + \frac{mA}{S} : A$, dalla quale si ottiene $A = \frac{360\ S}{360 - m}$. Posto $S = 365,25641$, $m = 12'',0$, si troverà $A = 365^g,25979 = 365^g\ 6^h\ 14'\ 6'',0$.

La rivoluzione anomalistica serve a trovare di quanto il Sole si allontana dalla posizione apparente dell'apogeo in un tempo t, supponendo, che il suo moto sia uniforme e proporzionale al tempo. In questa ipotesi, chiamata z la sua distanza angolare dall'apogeo alla fine del tempo t, sarà $z = \frac{360^{\circ}\ t}{A}$. In fatti, nel tempo t, il Sole e l'apogeo si allontanano da un punto fisso rispettivamente di $\frac{360 . t}{S}$, $\frac{mt}{S}$; perciò l'arco di cui il primo si è allontanato dal secondo sarà $= \frac{(360 - m)\ t}{S} = \frac{360 . t}{A}$. A questo angolo, che aumenta proporzionalmente al tempo danno gli Astronomi il nome di *anomalia media*, chiamando *anomalia vera* la distanza angolare vera del Sole dall'apogeo, ossia l'angolo che il raggio vettore, a cui corrisponde il Sole, fa coll'asse maggiore dell'orbita.

Scolio I. Gli Astronomi sogliono contare le anomalie sì vere che medie del Sole tanto a partire dall'apogeo, quanto a partire dal perigeo. Gli Astronomi del decorso secolo computavano le anomalie dall'apogeo pel Sole; dall'afelio pei pianeti; e dal perigeo per le comete. Affinchè le formule riescano più uniformi e per gli uni e per le

altre, le conteremo d'ora innanzi sempre partendo dal perigeo pel Sole, e dal perielio quando si tratterà di pianeti o di comete. Pel resto le formule adattate al perigeo e perielio si adattano facilmente all'apogeo ed afelio aumentando di 180° le anomalie valutate dal perigeo e perielio.

Scolio II. Noi abbiamo riferito le posizioni osservate del Sole in B ed M all'equinozio mobile di primavera. Di più nello stabilire le due precedenti equazioni non abbiamo tenuto alcun conto del moto progressivo dell'apogeo, che ci era ancora del tutto incognito. Si otterrà un risultamento più esatto riferendo le longitudini osservate ad un punto fisso, per esempio alla posizione dell'equinozio nella prima osservazione, e converrà di più tener conto del moto progressivo dell'apogeo, il quale in una mezza rivoluzione è $= 6'',0$. Per riferire la seconda posizione del Sole all'equinozio supposto fisso dopo la prima osservazione, io rifletto che mentre il Sole passa da B in M l'equinozio retrocede di una quantità $a\Upsilon = \frac{50'',2 . t}{365,25}$ supponendo t espresso in giorni. Dovrassi perciò in luogo di L' scrivere $L' - \frac{50'',2 . t}{365,25}$. Di più nel tempo, in cui il Sole passa da E in N, lo stesso punto N si avanza di $6'',0$; adunque per passare dall'apogeo al perigeo, in virtù della sua celerità angolare assoluta rapporto ad una stella fissa, deve percorrere un arco $= 180° \; 0' \; 6'',0$. Appellando quindi S la rivoluzione siderale del Sole, le due equazioni, dalle quali dovremo rilevare la posizione dell'apogeo diverranno

$$L' - L - \frac{50'',2 . t}{365,25} + x + y = 180° \; 0' \; 6'',0 ;$$

$$t + \frac{x}{m} + \frac{y}{m'} = \tfrac{1}{2} S + \frac{6'' \, S}{360 . 60 . 60} = \tfrac{1}{2} A .$$

Problema III. Determinare ad ogni istante la distanza angolare vera del Sole dal perigeo, ossia la sua anomalia vera.

84. (*Fig.* 21) Sia PFA l'ellisse percorsa dal Sole, T il fuoco ove risiede la terra; $T\Upsilon$ la linea degli equinozj, da cui si contano le longitudini, e domandisi l'anomalia vera del Sole ad un qualunque tempo t dopo il suo passaggio per il perigeo P.

Pongasi la cercata anomalia PTF . . . . $= v$
il raggio vettore TF . . . . $= r$
la longitudine del perigeo $PT\Upsilon$ al tempo t . $= \pi$
sarà la longitudine del Sole pel cercato tempo $t = v + \pi$.

Sia inoltre A la durata della rivoluzione anomalistica, S la superficie di tutta l'ellisse, ed s la superficie del settore ellittico PTF. Siccome dietro la legge scoperta dall'osservazione, le aree sono proporzio-

nali ai tempi, così avremo $S : s :: A : t$, e quindi $s = \frac{S}{A} t$, la quale differenziata dà $ds = \frac{S}{A} dt$. Ora per la teoria delle curve si ha $ds = \frac{1}{2} r^2 dv$; d'altronde dalla Geometria la superficie dell'ellisse uguaglia quella di un circolo avente per raggio una media proporzionale fra il semiasse maggiore ed il semiasse minore. Quindi se chiameremo a il semiasse maggiore, b il semiasse minore, e l'eccentricità, avremo per la natura dell'ellisse

$$S = \frac{360}{2} a b = 180 a^2 \sqrt{(1 - e^2)}, \text{ ed } r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}.$$

Introdotti questi valori nell'equazione $ds = \frac{S}{A} dt$, otterremo

$$\frac{360^\circ a^2 \sqrt{(1-e^2)}}{A} dt = \frac{a^2 (1-e^2)^2 dv}{(1+e\cos v)^2}, \text{ ovvero } \frac{dz}{(1-e^2)^{3/2}} = \frac{dv}{(1+e\cos v)^2},$$

ponendo $z = 360 \frac{t}{A}$. Dall'integrale pertanto di questa equazione dipende il valore di v, che si ricerca. Per integrarla facilmente, io osservo che si ha $1 + e\cos v = (1+e)\cos^2 \frac{1}{2} v + (1-e) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} v$; quindi

$$\frac{dz}{(1-e^2)^{3/2}} = \frac{dv}{[(1+e)\cos^2 \frac{1}{2} v + (1-e)\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} v]^2} = \frac{dv}{(1+e)^2 \cos^4 \frac{1}{2} v [1 + \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v]^2}.$$

Ponendo $\frac{1-e}{1+e} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} E$, fatte le opportune riduzioni, avremo $dz = dE(1 - e\cos E)$, la quale integrata dà $z + C = E - e \operatorname{sen} E$.

La costante arbitraria C deve in modo determinarsi, che posto $t = 0$, sia pur $v = 0$. Ora posto $t = 0$, si ha $z = 0$, ed essendo $v = 0$, eziandio $E = 0$; dunque z ed E sono contemporaneamente $= 0$. Quindi sarà $C = 0$. Ecco pertanto le formule, dalle quali dipende la soluzione del proposto problema

(1) $z = 360^\circ \frac{t}{A}$ = anomalia media; (2) $z = E - e \operatorname{sen} E$;

(3) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} E$.

Col mezzo della prima equazione si ricaverà il valore di z; dalla seconda quello di E; e dalla terza finalmente si otterrà la cercata anomalia vera v.

Le quantità z, E, v nel perigeo sono $= 0$, ed uguali 180 nell'apogeo; la quantità E viene dagli Astronomi nominata *anomalia eccentrica*.

Coroll. Risulta eziandio di qui il modo di calcolare ad un qualunque siasi dato tempo la longitudine vera del Sole computata dall'equinozio vero. Si calcoli per il medesimo tempo la longitudine media m, e la posizione del perigeo π. Sarà l'anomalia media $z = m - \pi$. Dalla equazione (2) si troverà l'anomalia eccentrica E; quindi dalla terza si ricaverà il valore di v. Conosciuto v sarà la longitudine vera $l = v + \pi$.

85. Tutta la difficoltà nel risolvere numericamente questo problema consiste in determinare E, dato essendo z; ed essendo trascendente la relazione fra z ed E, non si può ottenere il valore di E, che col metodo delle false posizioni, o col mezzo di una serie. Siccome comodissimo riesce il metodo delle false posizioni nel calcolo numerico, così non sarà inutile di farne parola, e di applicarlo anche ad un esempio, e ciò tanto più che vedremo in appresso muoversi i pianeti e le comete in altrettante ellissi di diverse eccentricità, ma con le medesime leggi, e quindi con le medesime formule trovarsi la loro posizione nell'orbita.

Quando pertanto dall'equazione $z = E - e \operatorname{sen} E$ voglia determinarsi E, principio dal riflettere, che z ed E essendo espressi in gradi, minuti e secondi, e dalle tavole dandosi sen E in parti di raggio, per l'omogeneità è necessario che l'eccentricità e sia espressa in gradi, minuti e secondi. Pongasi R'' il numero di minuti secondi contenuti nel raggio, e'' l'eccentricità e ridotta in secondi; sarà $e'' = R''e$, e l'equazione precedente diviene $z = E - e'' \operatorname{sen} E$. Essendo sen E compreso nei limiti di ± 1, sarà E racchiuso fra i limiti $z \pm e''$. Si porrà da principio $E = z$, e si avrà $E = z + e'' \operatorname{sen} z$ per un valore più prossimo, che chiamerò E'. Quindi un altro valore al vero più vicino sarà $E'' = z + e'' \operatorname{sen} E'$. Se E'' ed E' saranno uguali, sarà E'' il vero valore di E; in caso diverso si porrà $E''' = z + e'' \operatorname{sen} E''$, e così dopo pochi tentativi con facile interpolazione si perverrà a scuoprire il vero valore di E.

Allorchè con un calcolo grossolano e preparatorio siasi pervenuto ad avere un valore prossimo di E, si può con una semplicissima regola proposta dal celebre matematico Gauss ritrovare il vero valore di E. Sia ι il valore approssimato di E già noto, ed il vero valore sia $\iota + x$, cosicchè abbia luogo l'equazione $\iota + x = z + e'' \operatorname{sen}(\iota + x)$.

Per valutare la quantità $e'' \operatorname{sen}(\iota + x)$, si osservi nel prendere dalle tavole log sen ι, quanto esso logaritmo varia per 1''; se indichiamo tal variazione per λ, sarà evidentemente
$\log \operatorname{sen}(\iota + x) = \log \operatorname{sen} \iota + \lambda x$. Quindi nel valutare dalle tavole il valore di $e'' \operatorname{sen} \iota$, si osservi la variazione di $\log e'' \operatorname{sen} \iota$ per l'aumento di 1'' nel numero $e'' \operatorname{sen} \iota$, e sia questa $= \mu$. Dunque all'aumento λx in $\log \operatorname{sen}(\iota + x)$ corrisponderà un numero di secondi

$\frac{\lambda x}{\mu}$. Quindi sarà $e'' \operatorname{sen}(\iota + x) = e'' \operatorname{sen} \iota + \frac{\lambda x}{\mu}$, e perciò la nostra equazione diverrà $\iota + x = z + e'' \operatorname{sen} \iota + \frac{\lambda x}{\mu}$, e però $x = \frac{\mu}{\mu - \lambda}(z + e'' \operatorname{sen} \iota - \iota)$. Ponendo ora $\iota - e'' \operatorname{sen} \iota = z'$, sarà $x = \frac{\mu}{\mu - \lambda}(z - z')$. Qui poi convien osservare, che λ essendo l'aumento di log sen ι per $1''$, sarà λ positivo nel primo e quarto quadrante, negativo nel secondo e terzo. Laonde avremo sempre $x = \frac{\mu}{\mu \mp \lambda}(z - z')$, valendo il segno $-$ nel primo e quarto quadrante, ed il segno $+$ nel secondo e terzo. Se questa correzione x non risulterà molto grande, sarà il vero valore di $E = \iota + x$. In caso diverso si avvicinerà questo ad E molto più del precedente, e preso questo nuovo valore prossimo per ι, si ripeterà la stessa operazione, e con due, o al più tre correzioni si giungerà sempre al vero valore di E.

Esempio. Pongasi (come per Giunone) $\log e = 9{,}4051324$, e domandisi l'anomalia eccentrica E, allorquando $z = 330° \; 28' \; 13''$. Aggiungendo al dato $\log e$ il log cost. di $R'' = 5{,}3144251$, otterremo $\log e'' = 4{,}7195575$; e quindi $e'' = 14° \; 33' \; 47'',3$.

Dietro un calcolo preparatorio facilissimo ad istituirsi trovo che il valore di E è circa $321°$. Avremo pertanto . . . $\iota = 321° \; 0' \; 0'',0$

$$\begin{array}{rcl}
\log e'' = 4{,}7195575 & \lambda = 26{,}0 & -e'' \operatorname{sen} \iota = +9 \;\; 9 \;\; 53{,}6 \\
\underline{\log \operatorname{sen} \iota = 9{,}7988718-} & \mu = 132{,}0 & z' = 330 \;\; 9 \;\; 53{,}6 \\
\log - e'' \operatorname{sen} \iota = 4{,}5184293+ & \frac{\mu}{\mu - \lambda} = 1{,}2453 & z = 330 \;\; 28 \;\; 13{,}0 \\
 & & z - z' = + \;\; 18 \;\; 19{,}4
\end{array}$$

Quindi $x = \frac{\mu}{\mu - \lambda}(z - z') = +22' \; 49'',1$, e perciò il nuovo valore corretto di $E = 321° \; 22' \; 49'',1$.

Ponendo ora $\iota = 321° \; 22' \; 49'',1$, e ripetendo lo stesso calcolo si troverà $z' = 330° \; 28' \; 11'',5$; quindi $z - z' = +1'',5$; $\frac{\mu}{\mu - \lambda} = 1{,}24$; $x = +1'',86$, il che dà il nuovo valore di $E = 321° \; 22' \; 50'',96$, il quale preso per ι dà $z' = 330° \; 28' \; 13'',00$ esattamente $= z$.

86. Avendo, dietro ciò che precede, determinato l'anomalia eccentrica, e quindi l'anomalia vera v col mezzo della equazione

$\tang \frac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \tang \frac{1}{2} E$, determineremo il raggio vettore r col mezzo dell'equazione $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$.

Esistono fra le quantità z, E, r, v alcuni rapporti utilissimi nel calcolo logaritmico, e degni di attenzione, che noi qui uniremo senza dimostrazione, facilmente ricavandosi da chiunque sia un poco esperto nelle riduzioni trigonometriche.

$$(1)\ z = E - e'' \operatorname{sen} E; \quad (2)\ \tang \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \tang \tfrac{1}{2} E;$$

$$(3)\ \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}; \text{ e quindi } \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e\cos v};$$

$$(4)\ r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = a(1 - e\cos E);$$

$$(5)\ \cos\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\left(\frac{1+\cos E}{2}\right)} = \cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{\left(\frac{1+e}{1+e\cos v}\right)} = \cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{\left(\frac{r}{a(1-e)}\right)}$$

$$(6)\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\left(\frac{1-\cos E}{2}\right)} = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e\cos v}\right)} = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v\sqrt{\left(\frac{r}{a(1+e)}\right)}.$$

Queste ultime due equazioni si possono ancora porre sotto la seguente forma

$$(a)\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v\sqrt{r} = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}E\sqrt{[a(1+e)]}; \quad (b)\ \cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{r} = \cos\tfrac{1}{2}E\sqrt{[a(1-e)]};$$

donde tosto si deduce $r = \frac{a\sqrt{(1-e^2)}\operatorname{sen} E}{\operatorname{sen} v} = \frac{b \operatorname{sen} E}{\operatorname{sen} v} \ldots (c)$

nella quale la lettera b rappresenta il semiasse minore dell'ellisse.

Le due equazioni (a), (b) servono a determinare con molta facilità le quantità v ed r, essendo data l'anomalia eccentrica E, e l'equazione (c) servirà di riprova alle operazioni.

87. I metodi e le formule esposte nei paragrafi precedenti per determinare l'anomalia vera v ed il raggio vettore r sono molto comode pel calcolo numerico, e continuamente messe in opera degli Astronomi. Con tutto ciò occorre sovente di avere in funzione dell'anomalia media z tanto l'anomalia eccentrica E, quanto il raggio vettore r, e l'anomalia vera v. Ora essendo trascendente il rapporto fra z ed E, non si possono ottenere E, r, v dati per z altro che col mezzo di serie, le quali ordinate per le potenze di e riusciranno convergenti tutte le volte che sarà e una quantità molto piccola. Per vedere come tali serie si possano ottenere, noi ci proporremo di ritrovare i valori di E, r, v non tenendo conto che dei termini moltiplicati per e^4, rimandando per gli ulteriori dettagli alla Meccanica celeste del signor la

Place, ed alle Effemeridi di Milano pel 1805, nelle quali il signor Oriani ha spinto le approssimazioni fino ai termini moltiplicati per e^{11}.

Nella ricerca di queste serie noi faremo uso di un elegantissimo teorema dovuto al celebre signor la Grange, ed omai riferito in tutti i corsi di calcolo sublime. Il teorema è il seguente. Se tra x ed y si ha la relazione $x = y + \varphi x$, il valore di una qualunque Fx espresso per y vien somministrato della seguente serie

$$\text{(A)}\ Fx = Fy + \varphi y F'y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\overline{\varphi y}^2 F'y}{dy}\right) + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^2\overline{\varphi y}^3 F'y}{dy^2}\right) + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{d^3\overline{\varphi y}^4 F'y}{dy^3}\right) + \text{ec.}$$

ove $F'y = \left(\frac{dFy}{dy}\right)$.

Se poi si fa $Fx = x$ si ha $Fy = y$, $F'y = 1$, onde avremo

$$\text{(B)}\ x = y + \varphi y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\overline{\varphi y}^2}{dy}\right) + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^2\overline{\varphi y}^3}{dy^2}\right) + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{d^3\overline{\varphi y}^4}{dy^3}\right) + \text{ec.}$$

Posto ciò passiamo alla soluzione dei seguenti problemi.

Problema IV. Esprimere l'anomalia eccentrica E, *ed il raggio vettore* r *per l'anomalia media* z.

88. L'equazione $E = z + e \operatorname{sen} E$ confrontata con la superiore $x = y + \varphi x$ dà $x = E$, $y = z$, $\varphi x = e \operatorname{sen} E$; quindi l'equazione (B) del paragrafo precedente darà

$$E = z + e \operatorname{sen} z + \frac{d.e^2 \operatorname{sen}^2 z}{2\,dz} + \frac{d^2.e^3 \operatorname{sen}^3 z}{2.3\,dz^2} + \frac{d^3.e^4 \operatorname{sen}^4 z}{2.3.4\,dz^3} + \text{ec.}$$

la quale, introducendo in luogo delle potenze di sen z i seni e coseni dei multipli di z (Trig. II), si cangia nella seguente

$$E = z + e \operatorname{sen} z + \frac{e^2}{2}\,\frac{d(1-\cos 2z)}{2\,dz} + \frac{e^3}{2.3}\,\frac{d^2(3\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} 3z)}{2^2\,dz^2} + \frac{e^4}{2.3.4}\,\frac{d^3(3 - 4\cos 2z + \cos 4z)}{2^3\,dz^3} \ldots$$

ovvero

$$E = z + e \operatorname{sen} z + \frac{e^2}{2}\operatorname{sen} 2z - \frac{e^3}{2.3}\left(\frac{3\operatorname{sen} z - 3^2 \operatorname{sen} 3z}{2^2}\right) - \frac{e^4}{2.3.4}\,\frac{(4.2^3 \operatorname{sen} 2z - 4^3 \operatorname{sen} 4z)}{2^3} \ldots$$

la qual serie ordinata per i seni multipli di z, dopo le opportune riduzioni, diviene

$$E = z + \left(e - \frac{e^3}{8}\right)\operatorname{sen} z + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{6}\right)\operatorname{sen} 2z + \frac{3}{8}e^3 \operatorname{sen} 3z + \frac{e^4}{3}\operatorname{sen} 4z \ldots$$

nella quale i coefficienti dei seni di z sono esatti fino alle 4 potenze di e inclusive.

Per avere il valore di r espresso in una serie ordinata per le potenze di e, prendo l'equazione $r = a(1 - e\cos E)$, e pongo $Fx = 1 - e\cos E$, e quindi $F'y = + e \operatorname{sen} z$. Sostituiti nell'equazione (A) questi valori, avremo

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos E = 1 - e\cos z + e^2 \text{sen}^2 z + \frac{e^3}{2}\,\frac{d\,\text{sen}^3 z}{dz} + \frac{e^4}{2.3}\,\frac{d^2\,\text{sen}^4 z}{dz^2};$$

e, fatte le òpportune riduzioni, troveremo

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \left(e - \frac{3e^3}{8}\right)\cos z - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{3}\right)\cos 2z - \frac{3e^3}{8}\cos 3z - \frac{e^4}{3}\cos 4z,$$

nella quale i coefficienti sono esatti fino alle potenze qnarte di e, come sopra.

Problema V. Assegnare il valore di v con una serie ordinata per i seni multipli di z.

89. Si prenda l'equazione $\tang \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \tang \tfrac{1}{2} E$, e si confronti con l'equazione $\tang x = m \tang y$, dalla quale (Trig. IV) abbiamo ottenuto $\left(\text{ponendo } \theta = \frac{1-m}{1+m}\right)$

$$x = y - \theta\,\text{sen}\,2y + \frac{\theta^2}{2}\,\text{sen}\,4y - \frac{\theta^3}{3}\,\text{sen}\,6y + \frac{\theta^4}{4}\,\text{sen}\,8y \quad \text{ec.}$$

Avremo nel nostro caso $x = \tfrac{1}{2} v$; $y = \tfrac{1}{2} E$; $m = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}$;

donde risulta $\theta = \frac{\sqrt{(1-e)} - \sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1-e)} + \sqrt{(1+e)}} = \frac{-e}{1 + \sqrt{(1-e^2)}} = -\theta'$.

Quindi la citata serie moltiplicata per 2 si muterà nella seguente

$$v = E + 2\theta'\,\text{sen}\,E + \frac{2\theta'^2}{2}\,\text{sen}\,2E + \frac{2\theta'^3}{3}\,\text{sen}\,3E + \frac{2\theta'^4}{4}\,\text{sen}\,4E + \text{ec.}$$

Bisogna introdurre in questa i valori di $\text{sen}\,E$, $\text{sen}\,2E$ ec. dati per l'anomalia media z.

Ora nella equazione (A) del § 57 facendo $x = E$, $Fx = \text{sen}\,nE$, $\varphi x = e\,\text{sen}\,E$ avremo $F'x = n\cos nE$, $z = y$, avremo

$$\text{sen}\,nE = \text{sen}\,nz + ne\,\text{sen}\,z\cos nz + \frac{ne^2}{2}\,\frac{d.\text{sen}^2 z\cos nz}{dz}$$

$$+ \frac{ne^3}{2.3}\,\frac{d^2\,\text{sen}^3 z\cos nz}{dz^2} + \frac{ne^4}{2.3.4}\,\frac{d^3.\text{sen}^4 z\cos nz}{dz^3} + \text{ec.}$$

ovvero $\text{sen}\,nE = \text{sen}\,nz + ne\,\text{sen}\,z\cos nz + \frac{ne^2}{2}\,\frac{d(1-\cos 2z)\cos nz}{2\,dz}$

$$+ \frac{ne^3}{2.3}\,\frac{d^2(3\,\text{sen}\,z - \text{sen}\,3z)\cos nz}{2^2\,dz^2} + \frac{ne^4}{2.3.4}\,\frac{d^3(3 - 4\cos 2z + \cos 4z)\cos nz}{2^3\,dz^3} + \text{ec.}$$

Convertendo ora i prodotti dei seni e coseni in seni e coseni di archi semplici, ed eseguendo le indicate differenziazioni, otterremo

$$\text{sen}\, n E = \text{sen}\, n z + \tfrac{1}{2}(n e)[\text{sen}\,(1+n)z + \text{sen}\,(1-n)z]$$
$$+ \frac{n e^2}{2^2}[-n\,\text{sen}\, n z + \tfrac{1}{2}(2+n)\,\text{sen}\,(2+n)z + \tfrac{1}{2}(2-n)\,\text{sen}\,(2-n)z]$$
$$+ \frac{n e^3}{2.3.2^3}\left[\begin{array}{l} -3(1+n)^2\,\text{sen}\,(1+n)z - 3(1-n)^2\,\text{sen}\,(1-n)z \\ +(3+n)^2\,\text{sen}\,(3+n)z + (3-n)^2\,\text{sen}\,(3-n)z \end{array}\right]$$
$$+ \text{ ec.}$$

Ricaveremo di qui i valori di sen E, sen $2\,E$, sen $3\,E$ ec. rispettivamente fino alle potenze di terzo, secondo, primo ordine ec., perchè sono essi moltiplicati per θ', θ'^2, θ'^3. Avremo così, fatte le opportune riduzioni

$$\text{sen}E = (1 - \tfrac{1}{8}e^2)\text{sen}\,z + (\tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{6}e^3)\text{sen}\,2z + \tfrac{3}{8}e^2\text{sen}\,3z + \tfrac{1}{3}e^3\text{sen}\,4z + \ldots$$
$$\text{sen}\,2E = -e\,\text{sen}\,z + (1-e^2)\,\text{sen}\,2z + e\,\text{sen}\,3z + e^2\,\text{sen}\,4z \ldots;$$
$$\text{sen}\,3E = -\frac{3}{2}e\,\text{sen}\,2z + \text{sen}\,3z + \frac{3}{2}e\,\text{sen}\,4z \ldots; \quad \text{sen}\,4E = \text{sen}\,4z \ldots$$

Si ha poi fino alle quarte potenze inclusive

$$2\,\theta' = e + \frac{e^3}{4}; \quad \frac{2\,\theta'^2}{2} = \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8}; \quad \frac{2\,\theta'^3}{3} = \frac{e^3}{12}; \quad \frac{2\,\theta'^4}{4} = \frac{e^4}{32};$$

Introducendo nella superiore espressione di v il valore di E dato nel problema precedente, ed i superiori valori di sen E, sen $2\,E$ ec., fatte le opportune riduzioni, troveremo

$$v = z + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\text{sen}\,z + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11e^4}{24}\right)\text{sen}\,2z + \frac{13}{12}e^3\text{sen}\,3z + \frac{103}{96}e^4\text{sen}\,4z + \ldots$$

la qual serie risolve il propostoci problema.

Problema VI. Esprimere l'anomalia media per mezzo dell'anomalia vera.

90. Riprendasi l'equazione $r^2\,d\,v = \frac{2\,S}{A}\,d\,t$ del problema III, e ponendo come allora $S = 360\,a\,b$, e $z = 360\,\frac{t}{A}$, essa diviene

$r^2\,d\,v = a\,b\,d\,z$, ovvero $d\,z = \frac{(1-e^2)^{3:2}\,d\,v}{(1+e\cos v)^2}$. Frattanto

$$\frac{d\,v}{(1+e\cos v)^2} = d\,v[1 - 2e\cos v + 3e^2\cos^2 v - 4e^3\cos^3 v + 5e^4\cos^4 v + \ldots]$$
$$= d\,v\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4\right) - d\,v\cos v(2e + 3e^3) + d\,v\cos 2\,v\left(\frac{3}{2}e^2 + \frac{5}{2}e^4\right)$$
$$- e^3\,d\,v\cos 3\,v + \frac{5}{8}e^4\,d\,v\cos 4\,v + \ldots$$

Moltiplicando ora questa espressione per $(1-e^2)^{3/2}=1-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4\ldots$ ed integrando otterremo per la cercata relazione

$$z=v-2e\,\mathrm{sen}\,v+\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{e^4}{8}\right)\mathrm{sen}\,2v-\frac{e^3}{3}\,\mathrm{sen}\,3v+\frac{5}{32}e^4\,\mathrm{sen}\,4v\ldots$$

ove non si aggiunge costante, dovendo essere z e v contemporaneamente $=0$.

Problema VII. Assegnare la massima equazione del centro, ossia la massima differenza fra v *e* z.

91. Appellano gli Astronomi *equazione del centro* la differenza fra l'anomalia vera e l'anomalia media. Questa equazione del centro è quella quantità, di cui conviene aumentare l'anomalia media per avere la vera; del pari sommando l'equazione del centro con la longitudine media si otterrà la longitudine vera. Ora essendo essa in generale espressa da $v-z$, sarà nel suo massimo, quando $dv=dz$. Siccome poi si ha fra z e v l'equazione differenziale $r^2dv=ab\,dz$, sarà nel caso della massima equazione $r=\sqrt{(ab)}=a\sqrt[4]{(1-e^2)}$. Ma $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$. Quindi si otterrà $\cos v=\frac{(1-e^2)^{3/4}-1}{e}$, dalla quale equazione ottiensi il valore dell'anomalia vera corrispondente alla massima equazione del centro.

Trovata l'anomalia vera v, si cercherà l'anomalia media, e quindi la differenza loro sarà la cercata massima equazione del centro.

92. *Coroll. I.* Si può sviluppare la massima equazione in una serie ordinata per l'eccentricità e. In fatti l'equazione

$\cos v=\frac{(1-e^2)^{3/4}-1}{e}$ svolta in serie darà

$\cos v=-\frac{3}{4}e-\frac{1}{32}e^3-\frac{5}{128}e^5-$. Si ricaveranno da questa serie i valori di $\mathrm{sen}\,v$, $\mathrm{sen}\,2v$, $\mathrm{sen}\,3v$, $\mathrm{sen}\,4v$ da sostituirsi nella serie del problema precedente. Se vorremo spingere il calcolo fino alle quarte potenze di e inclusive, avremo

$\mathrm{sen}\,v=1-\frac{9}{32}e^2$; $\mathrm{sen}\,2v=-\frac{3}{2}e$; $\mathrm{sen}\,3v=-1$; $\mathrm{sen}\,4v=0$.

Sostituiti questi valori nella indicata serie, otterremo

$z=v-2e-\frac{11}{48}e^3$. Posta quindi la massima equazione del centro $=\alpha$, sarà $\alpha=2e+\frac{11}{48}e^3+$ ec.

Coroll. II. Si può da quest'ultima serie ottenere l'eccentricità e, qualora siasi osservato α. In fatti col noto metodo del ritorno delle serie tosto si deduce $e = \frac{1}{2}\alpha - \frac{11}{768}\alpha^3$.

Questa serie è molto convergente nello stato dell'Astronomia, essendo α sempre quantità discretamente piccola, e serve a dare con molta facilità l'eccentricità dell'orbita, tosto che siasi osservata la massima equazione del centro α. Essa è dovuta al celebre Lambert, il quale la continuò fino alla settima potenza; ed ecco il suo risultamento $e = \frac{1}{2}\alpha - \frac{11}{768}\alpha^3 - \frac{587}{983040}\alpha^5 - \frac{40583}{264241520}\alpha^7$.

***Problema VIII.** Determinare l'eccentricità dell'orbita solare col mezzo della massima equazione del centro.*

93. L'eccentricità dell'orbita solare determinata dal confronto dei diametri solari potrebbe essere qualche poco in errore, a motivo delle difficoltà di bene osservarli, ed apprezzarne il loro giusto valore. Se per altro si perverrà a riconoscere col mezzo dell'osservazione la massima equazione del centro, sarà quindi facile determinare l'eccentricità colla formula del corollario II del problema precedente.

(*Fig.* 21) Sia AP l'asse maggiore dell'orbita solare; e $T\Upsilon$ la linea degli equinozj, da cui si contano le longitudini; l'apogeo sia in A, il perigeo in P. Allorquando il Sole trovasi nei punti della massima equazione del centro, la sua celerità angolare media deve uguagliare la vera, ossia l'incremento diurno della sua longitudine giornaliera deve essere $= 59' 8'', 33$. Osservando pertanto giornalmente le longitudini del Sole, si scelgano due posizioni di esso equidistanti dall'apogeo, o dal perigeo in punti tali S', S'', che la sua celerità vera osservata sia $= 59' 8'', 33$, e corrispondano esse alle longitudini $\Upsilon T S' = L$, $\Upsilon T S'' = L'$. Siano poi le corrispondenti longitudini medie $= \Upsilon T \sigma' = l$, $\Upsilon T \sigma'' = l'$, ed il tempo intercetto fra la prima osservazione in S', e la seconda in S'' espresso in giorni sia $= t$. Sarà $\sigma' T \sigma'' = (59' 8'', 33)\, t$, e quindi
$\sigma' T \sigma'' - S' T S'' = 2\alpha = (59' 8'', 33)\, t - L' + L$, ossia
$\alpha = \frac{1}{2}[(59' 8'', 33)\, t - L' + L]$.

Conosciuto il valore di α in gradi e minuti, si ridurrà in parti di raggio, e sostituito poi nella formula del coroll. precedente darà il valore di e. In tal guisa il chiarissimo astronomo de Lambre trovò la massima equazione del centro per l'orbita solare nel $1780 = 1° 55' 33'', 3$. Quindi $\alpha = 0,0336135g$. Sostituito questo valore di α nella serie $e = \frac{1}{2}\alpha - \frac{11}{768}\alpha^3$, si avrà $e = 0,0168063$.

Determinando a epoche diverse e molto fra loro lontane la mas-

sima equazione del centro, si è trovato che essa va diminuendo, e la sua diminuzione corrisponde a 90",1 per ogni 100 anni; quindi l'eccentricità diminuirà essa pure di una piccola quantità, vale a dire di circa 0,0000493 per ogni 100 anni. Questa piccola diminuzione secolare difficilmente si sarebbe potuta scoprire colla sola osservazione, se non dopo un certo numero di secoli, confrontando fra loro osservazioni fatte con una precisione molto superiore a quella delle antiche osservazioni. La teoria generale del moto dei corpi celesti, additando il principio da cui essa dipende, ci ha fatto conoscere non solo la sua quantità, ma di più ci assicura, che tal diminuzione ha un limite, al di là del quale non può andare, e pervenuta a questo limite, la diminuzione col tardo svolgersi dei secoli si cambierà in aumento.

94. *Scolio*. Esattissima riuscirebbe l'eccentricità determinata con questo metodo, se non fosse molto difficile ricavare coll'interpolazione i punti S', S'', nei quali la celerità vera del Sole è uguale alla celerità media, e se l'azione degli altri corpi celesti (azione che dimostreremo in appresso esercitarsi scambievolmente fra i corpi tutti del nostro sistema planetario) non disturbasse qualche poco le leggi del moto elittico. Qualunque metodo si adoperi per determinare l'eccentricità dell'ellisse solare, conviene prima di tutto spogliare le longitudini osservate dall'azione degli altri corpi celesti, la quale, quantunque piccola, non è trascurabile nello stato della odierna Astronomia. Se poi si abbiano le longitudini solari spogliate da queste piccole azioni, la serie del problema VI sómministra metodi molto facili e spediti per determinare il valore di e, intorno ai quali noi non ci tratterremo, potendo ciascheduno agevolmente formarseli dietro il piano delle proprie osservazioni.

Del resto dobbiamo osservare, che nell'odierno stato delle tavole ben più speditamente determinano gli Astronomi la massima equazione del centro coi seguenti precetti. Prendono in primo luogo due longitudini del Sole, osservate con tutta cura verso i punti della massima equazione, cioè verso il fine di Marzo ed il principio di Ottobre di uno stesso anno, ed avendo loro applicate le perturbazioni in senso contrario, prendono la loro differenza. Quindi colla data differenza dei tempi medj corrispondenti alle osservazioni, calcolano la differenza delle longitudini, la quale eziandio si può tosto dedurre dalle tavole solari. Sia D la differenza delle longitudini vere osservata; d la differenza delle longitudini medie. La quantità $D-d$ differirà di pochi secondi dalla doppia massima equazione del centro. Per trovare la quantità, di cui deve essa aumentarsi, si calcolino colle tavole solari l'equazioni del centro negli istanti delle due osservazioni, e si sommino. Presa quindi la differenza fra questa somma ed il doppio della massima equazione del centro delle tavole, si avrà la quantità da aggiungere alla

differenza $D - d$ per ricondurla alla massima equazione del centro, quale si sarebbe osservata se le due osservazioni fossero state fatte nei punti corrispondenti alla medesima. La ragione di questi precetti è evidente quando si rifletta, che in qualunque sistema di eccentricità, per quella piccola correzione di cui abbisognar possono le tavole, le variazioni dell' equazione del centro sono le medesime verso i punti della massima equazione. (*Vedasi l'Astronomia del sig. Piazzi vol. II. pag.* 125. *e seg.*)

CAPITOLO VII.

Della misura del tempo. Del tempo vero, del tempo medio, e del tempo sidereo.

95. La durata della rivoluzione tropica del Sole chiamasi *anno*, e siccome questa si è trovata costante col mezzo delle osservazioni; dunque tale sarà eziandio la lunghezza dell' anno.

Il tempo fra due consecutivi passaggi del Sole per uno stesso meridiano costituisce il *giorno*, il quale si divide in 24 parti uguali chiamate *ore;* l'ora suddividesi in 60 parti chiamate *minuti primi;* ed il minuto suddividesi in altre 60 parti nominate *secondi*. Così il giorno è composto di 86400 minuti secondi. Ora il Sole non ritorna al meridiano se non dopo aver compito, in virtù del suo moto diurno, una rivoluzione intera intorno alla terra, con quel di più che in virtù del suo moto proprio si è avanzato nella sua orbita verso oriente, riducendo l' arco da esso percorso nell' ecclittica all' equatore, ed in tempo a ragione di un minuto per ogni 15 minuti di arco. Dietro ciò è facile comprendere, che la durata del giorno non può essere costante, e ciò per due ragioni: 1.° perchè la direzione del moto del Sole varia giornalmente rapporto all' equatore; 2.° perchè havvi una variazione reale nel moto del Sole. La durata del giorno vero deve pertanto essere ora maggiore ed ora minore; frattanto le variazioni, alle quali è essa sottoposta, sono sempre piccole, e si può comodamente riferire ad una durata media nel modo seguente.

96. Si concepisca un Sole fittizio, il quale passi pel perigeo nel medesimo tempo del Sole vero, e percorra con moto uniforme l' ecclittica nello stesso tempo in cui la percorre il Sole vero. Si concepisca un secondo Sole fittizio, il quale passando per l' equinozio al tempo stesso del precedente, percorra uniformemente la circonferenza dell' equatore celeste con un moto uguale al moto medio del Sole. Per ultimo immaginiamoci il Sole vero che percorra la circonferenza

dell' ecclittica col suo moto annuo vero. Indichiamo questi tre Soli per ordine con S, S', S''. Egli è chiaro che l'AR di S' è sempre uguale alla longitudine di S, passando ambedue contemporaneamente per l'equinozio, e percorrendo ognuno archi uguali in tempi uguali. Ora la longitudine di S è la longitudine media del Sole vero, adunque l'AR di S' e la longitudine media del Sole sono uguali.

Se fosse l'AR di S' sempre uguale all'AR di S'', i due Soli S' ed S'' passerebbero sempre contemporaneamente al meridiano; ed essendo diverse, quello passerà prima che avrà una minore AR. La differenza delle AR di S' e di S'' ridotta in tempo indicherà la differenza dei passaggi di questi due Soli pel meridiano. Frattanto egli è evidente, che S' non è ricondotto al meridiano, se non quando la sfera celeste ha ruotato per un angolo di 360° 59′ 8″,33. Adunque la durata dei giorni, che verrebbero da S' denotati, sarebbe costante.

Ciò posto, la durata costante del giorno indicata dal Sole fittizio S' appellasi *giorno medio;* il momento in cui questo Sole passerebbe per l'equinozio (*), costituisce l'*equinozio medio*, essendo l'*equinozio vero* indicato dal passaggio del Sole vero per lo stesso equinozio. Il tempo indicato da un orologio, che sarebbe regolato sopra S', chiamasi *tempo medio*, ed il tempo indicato dall' orologio regolato sul Sole vero S'' dicesi *tempo vero* o *tempo apparente*, essendo questo quello che veramente si osserva. La differenza fra il tempo indicato dal Sole fittizio S' ed il Sole vero S'' dicesi dagli Astronomi *equazione del tempo*.

Problema I. Determinare l'equazione del tempo per un istante qualunque.

97. (*Fig.* 22) Rappresenti CB l' ecclittica, CM l'equatore, BC la longitudine vera del Sole, sia CM la sua AR media, CA l'AR vera. Siano inoltre le ore indicate dall' orologio regolato sul tempo medio da M; da V le corrispondenti nell' orologio vero; E la cercata equazione del tempo, sarà $E = M - V$. Ora avendo il giorno vero, ed il giorno medio la loro origine quando i punti M, A passano pel meridiano, è palese che sarà $V > M$, quando è $AC < MC$; perciò sarà $V = M + \frac{1}{15} MA$, ed $E = -\frac{1}{15} MA = \frac{1}{15}(AC - CM)$, dove gli archi dell' equatore sono divisi per 15 per ridurli in tempo.

Pongasi $CB = L$, $CA = \alpha$, $BCA = \iota =$ obbliq. dell' ecclittica

(*) L' equinozio medio, a vero dire, differisce qualche poco dall' equinozio vero o apparente per certi piccoli movimenti, ai quali è questo sottoposto, e dei quali parleremo in progresso.

$CM = t$. Sarà $\tang \alpha = \cos \iota \tang L$, e quindi l'equazione del tempo E sarà $= \frac{\alpha - t}{15}$.

Si può anche trovare il valore di $\alpha - t$ espresso in una serie ordinata per i seni multipli dell'arco L. In fatti ponendo la longitudine del perigeo $= \pi$, z l'anomalia media del Sole, v la vera, sarà $t = z + \pi$, $L = v + \pi$; onde $z = t - \pi$, $v = L - \pi$. Sostituiti questi valori nella serie del problema VI al § 90, si otterrà

$$t = L - 2e \operatorname{sen}(L-\pi) + \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{e^4}{8}\right) \operatorname{sen} 2(L-\pi) - \frac{e^3}{3} \operatorname{sen} 3(L-\pi) + \ldots$$

l'equazione $\tang \alpha = \cos \iota \tang L$ sviluppata in serie (Trig. IV) dà

$$\alpha = L - \theta \operatorname{sen} 2L + \frac{\theta^2}{2} \operatorname{sen} 4L - \frac{\theta^3}{3} \operatorname{sen} 6L \ldots \theta = \frac{1 - \cos \iota}{1 + \cos \iota} = \tang^2 \tfrac{1}{2}\iota.$$

La differenza di queste due serie darà la cercata equazione del tempo.

Nel ridurre queste due serie a numeri convien moltiplicarle per il numero di minuti secondi contenuti nel raggio, ed in tal guisa saranno ridotte in secondi di arco. Se poi si dividono per 15, saranno ridotti in tempo i coefficienti dei seni; laonde per ridurli in tempo si dovranno moltiplicare per $\frac{R''}{15}$, il cui logaritmo è $= 4{,}1383338$.

Posto pertanto $e = 0{,}016807$, $\iota = 23° 28'$, si otterrà

$$t = L - 462'',23 \operatorname{sen}(L-\pi) + 2'',91 \operatorname{sen}(2L - 2\pi) - 0'',02 \operatorname{sen}(3L - 3\pi)$$
$$\alpha = L - 593'',19 \operatorname{sen} 2L + 12'',79 \operatorname{sen} 4L - 0'',37 \operatorname{sen} 6L \ldots$$

Quindi

$$E = +462'',23 \operatorname{sen}(L-\pi) - 2'',91 \operatorname{sen}(2L - 2\pi) + 0'',02 \operatorname{sen}(3L - 3\pi)$$
$$- 593'',19 \operatorname{sen} 2L + 12'',79 \operatorname{sen} 4L - 0'',37 \operatorname{sen} 6L.$$

Calcolando per ogni giorno questa formula si ha l'equazione del tempo, vale a dire quella quantità, che si deve aggiungere al tempo vero per ottenere il medio. Si può essa eziandio ridurre in una tavola, il cui argomento sia L, giacchè L è la sola variabile contenuta in questa espressione.

Coroll. Se fosse l'eccentricità $= 0$, in tal caso mancherebbe la prima linea; il moto del Sole sarebbe uniforme, e l'equazione del tempo si ridurrebbe unicamente alla seconda linea, che dipende soltanto dalla posizione dell'ecolittica rapporto all'equatore. Risulta di qui che la parte più forte dell'equazione del tempo non è già dovuta alla irregolarità del moto del Sole, ma bensì all'obbliquità dell'ecclittica.

Trascurando nella precedente espressione le quantità al di sotto di 1'', essa non contiene di variabile che sen $4L$ nella sua massima potenza. Ponendo pertanto $dT = 0$, l'equazione risultante avrà quattro radici, e quindi quattro volte all'anno sarà l'equazione del tempo $= 0$, ossia quattro volte all'anno il tempo vero coinciderà col tem-

po medio. Noi non ci occuperemo della risoluzione di questa equazione, non più che dei suoi massimi, potendosi questi punti con somma facilità rilevare da un Effemeride, ove sia per tutti i giorni dell' anno calcolata l'equazione del tempo.

Problema II. (*) *Assegnare l'equazione del tempo mediante una serie ordinata pei seni e coseni della longitudine media* t, *avendo eziandio riguardo ai movimenti oscillatorj dell' equinozio prodotti dalla nutazione, ed alle perturbazioni planetarie.*

98. Sia L la longitudine ellittica del Sole valutata dalla posizione media dell' equinozio, vale a dire da quella posizione che avrebbe se non avesse luogo la nutazione; P sia la somma delle attrazioni planetarie; $18''$ sen N la quantità che si deve aggiungere per tener conto della nutazione, ossia per valutare le longitudini dall' equinozio apparente. La longitudine apparente del Sole sarà $= L + P + 18''$ sen N (essendo $N = 360° -$ longit. del nodo di Luna, come sarà dimostrato nel capitolo della nutazione).

L' obbliquità dell' ecclittica oltre la sua lentissima diminuzione progressiva, di cui abbiamo fatto parola (§ 78), è sottoposta ad una oscillazione dipendente essa pure dall' effetto della nutazione, e tale che se chiamiamo ι l' obbliquità media, ι' l' obbliquità apparente, ha luogo l' equazione $\iota' - \iota = 9''$ cos N.

L'AR media del Sole è uguale alla sua longitudine media, qualora trascurisi l' effetto della nutazione. Ma se l'AR media vorrassi contare dallo stesso equinozio apparente per confrontarla con l'AR apparente, dovrà essa essere aumentata della quantità $18''$ cos ι' sen N, ovvero $18''$ cos ι sen N a motivo della piccola differenza fra ι ed ι'. Quindi chiamata t la longitudine media del Sole sarà

$$AR \text{ media} = t + 18'' \cos \iota \text{ sen } N.$$

Per trovare ora l' equazione del tempo conviene con la longitudine apparente $L + P + 18''$ sen N, e con l' obbliquità apparente ι calcolare l'AR apparente del Sole, che porremo $= L + P + 18''$ sen $N + R$, ad avremo $E = L + P + 18''$ sen $N + R - t - 18''$ cos ι sen N, ovvero. . $E = L - t + P + R + 36''$ sen$^2 \frac{1}{2}\iota$ sen N.
Ponendo $\iota = 23° 28'$, e riducendo in tempo la precedente espressione si otterrà $E = \frac{1}{15}(L - t + P + R) + 0'',09925$ sen N.

Frattanto la quantità $L - t$ è evidentemente l' equazione del centro, la quale pel problema V capit. preced. si può esprimere per la

(*) Per l' intelligenza di questo problema conviene aver prima compreso la teoria della nutazione, della quale tratteremo in seguito. Abbiamo creduto bene d' inserirlo qui, non richiedendosi altro se non che ammettano i giovani ciò che sarà in seguito dimostrato.

serie $\left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \text{sen}\, z + \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4\right) \text{sen}\, 2z + \ldots$

e ponendo $z = t - \pi$, $2e - \frac{e^3}{4} = a$, $\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 = b \ldots$

avremo $L - t = a\, \text{sen}\,(t - \pi) + b\, \text{sen}\,(2t - 2\pi) \ldots$

Noi trascuriamo i termini dipendenti da e^3 ed e^4 perchè insensibili. Quanto ad R si è trovato nel problema precedente

$\alpha = L - \theta\, \text{sen}\, 2L + \frac{\theta^2}{2} \text{sen}\, 4L - \frac{\theta^3}{3} \text{sen}\, 6L \ldots$ essendo $\theta = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} i$.

Quindi $R = -\theta\, \text{sen}\, 2L + \frac{\theta^2}{2} \text{sen}\, 4L - \frac{\theta^3}{3} \text{sen}\, 6L \ldots$

Frattando essendo $L = t + a\, \text{sen}\,(t - \pi) + b\, \text{sen}\,(2t - 2\pi)$, se ci proponiamo di trascurare i termini dell'ordine $a\,\theta^3$, $b\,\theta^3$, come insensibili (a^2, b essendo dello stesso ordine) avremo

$\text{sen}\, 2L = (1 - a^2)\, \text{sen}\, 2t + a\,[\text{sen}\,(3t - \pi) - \text{sen}\,(t + \pi)]$
$\quad + b\,[\text{sen}\,(4t - 2\pi) - \text{sen}\, 2\pi] + \tfrac{1}{2} a^2\, [\text{sen}\,(4t - 2\pi) + \text{sen}\, 2\pi] \ldots$

$\text{sen}\, 4L = (1 - 4a^2)\, \text{sen}\, 4t + 2a\,[\text{sen}\,(5t - \pi) - \text{sen}\,(3t + \pi)]$
$\quad + (2b + 2a^2)\, \text{sen}\,(6t - 2\pi) - (2b - 2a^2)\, \text{sen}\,(2t + 2\pi) \ldots$

$\text{sen}\, 6L = \text{sen}\, 6t + 3a\, \text{sen}\,(7t - \pi) - 3a\, \text{sen}\,(5t + \pi) \ldots$

Introducendo ora questi valori nel valore di R, ed osservando che a motivo della piccolezza di a, la quantità $1 - a^2 = \cos^2 a$, $1 - 4a^2 = \cos^2 2a$ ed $a^2 = \text{sen}^2 a$, riducendo in secondi i termini che sarebbero espressi in parti di raggio, fatte le opportune riduzioni, si formerà la seguente equazione

$$E = \left(-\frac{\theta\, \text{sen}^2 a}{\text{sen}\, 30''} + \frac{b\,\theta}{15}\right) \text{sen}\, 2\pi + \left(\frac{a}{15} + \frac{a\,\theta}{15}\right) \cos \pi\, \text{sen}\, t$$

$$+ \left(\frac{b}{15} \cos 2\pi - \frac{\theta \cos^2 a}{\text{sen}\, 15''} + \frac{\theta^2\, \text{sen}^2 a}{\text{sen}\, 15''} \cos 2\pi - \frac{b\,\theta^2}{15} \cos 2\pi\right) \text{sen}\, 2t$$

$$- \left(\frac{a\,\theta}{15} + \frac{a\,\theta^2}{15}\right) \cos \pi\, \text{sen}\, 3t$$

$$+ \left(-\frac{\theta\, \text{sen}^2 a}{\text{sen}\, 30''} \cos 2\pi - \frac{b\,\theta}{15} \cos 2\pi + \frac{\theta^2 \cos^2 2a}{\text{sen}\, 30''}\right) \text{sen}\, 4t$$

$$+ \left(\frac{a\,\theta^2}{15} \cos \pi + \frac{a\,\theta^3}{15} \cos \pi\right) \text{sen}\, 5t$$

$$+ \left(\frac{\theta^2\, \text{sen}^2 a}{\text{sen}\, 15''} \cos 2\pi + \frac{b\,\theta^2}{15} \cos 2\pi - \frac{\theta^3}{\text{sen}\, 45''}\right) \text{sen}\, 6t$$

$$- \frac{a\,\theta^3}{15} \cos \pi\, \text{sen}\, 7t$$

$$+\left(-\frac{a}{15}+\frac{a\,\theta}{15}\right)\text{sen}\,\pi\cos t$$
$$+\left(-\frac{b}{15}+\frac{\theta^2\,\text{sen}^2\,a}{\text{sen}\,15''}-\frac{b\,\theta^2}{15}\right)\text{sen}\,2\,\pi\cos 2\,t$$
$$+\left(\frac{a\,\theta}{15}-\frac{a\,\theta^2}{15}\right)\text{sen}\,\pi\cos 3\,t$$
$$+\left(\frac{\theta\,\text{sen}^2\,a}{\text{sen}\,30''}+\frac{b\,\theta}{15}\right)\text{sen}\,2\,\pi\cos 4\,t$$
$$-\left(\frac{a\,\theta^2}{15}-\frac{a\,\theta^3}{15}\right)\text{sen}\,\pi\cos 5\,t$$
$$-\left(\frac{\theta^2\,\text{sen}^2\,a}{\text{sen}\,15''}+\frac{b\,\theta^2}{15}\right)\text{sen}\,2\,\pi\cos 6\,t$$
$$+\frac{a\,\theta^3}{15}\text{sen}\,\pi\cos 7\,t+\frac{1}{15}P+0'',09925\,\text{sen}\,N$$
$$-0'',00575\,P\cos 2\,t-0'',117\,\text{sen}\,(2\,t+N)-0'',013\,\text{sen}\,(2\,t-N).$$

Qui poi convien osservare che il valore di R si è calcolato supponendo che fosse la longitudine del Sole $=L$, e la obbliquità dell'ecclittica $=\epsilon$. Convien dunque aumentare ancora il precedente valore di E dei termini provenienti da un aumento nella longitudine $=P+18''\,\text{sen}\,N$, e da un aumento in $\epsilon=9''\cos N$, i quali termini si otterranno differenziando la precedente espressione rapporto a t, e rapporto ad ϵ, e ponendo $d\,t=P+18''\,\text{sen}\,N$, e $d\,\epsilon=9''\cos N$. Ora con un poco d'attenzione facilmente si riconosce, che di tutti i termini componenti il valore di E, il solo termine $-\frac{\theta\cos^2 a}{\text{sen}\,15''}\text{sen}\,2\,t$ soffre una piccola variazione per questi aumenti, le variazioni degli altri rimanendo insensibili. Non avendo riguardo pertanto che a questo solo termine, si otterrà

$$\delta E=-\frac{\cos^2 a}{15}\frac{\delta\theta}{\delta\epsilon}9''\cos N\,\text{sen}\,2\,t-\frac{2\,\theta\cos^2 a}{15}\cos 2\,t\,(18''\,\text{sen}\,N+P).$$

Ora essendo $\theta=\text{tang}^2\,\frac{1}{2}\,\epsilon$, sarà $\frac{\delta\theta}{\delta\epsilon}=\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\epsilon}{\cos^2\,\frac{1}{2}\,\epsilon}$. Quindi, ponendo $\epsilon=23°\,28'$, $a=1°\,55'\,27''$ (come si ha dalle determinazioni di de Lambre), otterremo

$$\delta E=-0'',130\cos N\,\text{sen}\,2\,t-0'',104\,\text{sen}\,N\cos 2\,t-0{,}00575\,P\cos 2\,t,$$

ovvero

$$\delta E=-0'',117\,\text{sen}\,(2\,t+N)-0'',013\,\text{sen}\,(2\,t-N)-0{,}00575\,P\cos 2\,t,$$

ove il numero P si suppone espresso in secondi sessagesimali.

Aggiungendo poi questi termini alla espressione di E, si avrà il valore completo dell' equazione del tempo quale sopra si è riferito.

Questa maniera di esprimere l' equazione del tempo per la longitudine media del Sole devesi al sig. de Lambre, il quale la produsse nella prefazione alle sue tavole solari pubblicate in Parigi nel 1806, ed in seguito la riprodusse nella sua Astronomia impressa in Parigi nel 1814 vol. II pag. 199. La sopra riferita formula differisce in alcuni termini da quella del sig. de Lambre; ed al chiar. sig. Piazzini professore d' Astronomia nell' Università di Pisa son debitore del primo annunzio di alcuni errori nella medesima incorsi. I suoi risultamenti essendo d' accordo con i miei, giova sperare che essa sia esatta.

Scolio. I coefficienti dei seni e coseni dell' arco t nel precedente valore di dT sarebbero costanti se tali fossero eziandio l' eccentricità e, da cui dipendono a e b, l' obbliquità dell' ecclittica, da cui dipende θ, ed il luogo del perielio π. Ora essendo sottoposte a lentissime variazioni secolari, anche questi coefficienti varieranno col tempo. Se assumiamo le determinazioni del sig. de Lambre ridotte agli anni 1800, 1900 dal sig. barone de Zach nell' opera intitolata *Tabulae speciales aberrationis et nutationis etc. Gothae* 1806 vol. I pag. 179 avremo per E i seguenti valori corrispondenti alle due epoche indicate.

pel 1800	pel 1900
$E = +\,0'',041$	$E = +\,0'',047$
$+\;79'',365 \text{ sen } t + 435'',821 \cos t$	$+\;93'',385 \text{ sen } t + 432'',275 \cos t$
$-597,077 \text{ sen } 2t + 1,569 \cos 2t$	$-596,200 \text{ sen } 2t + 1,831 \cos 2t$
$-\;3,423 \text{ sen } 3t - 18,799 \cos 3t$	$-\;4,023 \text{ sen } 3t - 18,622 \cos 3t$
$+\;13,249 \text{ sen } 4t - 0,177 \cos 4t$	$+\;13,202 \text{ sen } 4t - 0,206 \cos 4t$
$+\;0,148 \text{ sen } 5t + 0,811 \cos 5t$	$+\;0,173 \text{ sen } 5t + 0,802 \cos 5t$
$-\;0,403 \text{ sen } 6t + 0,012 \cos 6t$	$-\;0,400 \text{ sen } 6t + 0,014 \cos 6t$
$-\;0,006 \text{ sen } 7t - 0,037 \cos 7t$	$-\;0,007 \text{ sen } 7t - 0,036 \cos 7t$

$$+\frac{1}{15}P + 0'',09925 \text{ sen } N - 0,00575\, P \cos 2t$$

$$-\,0'',117 \text{ sen } (2t + N) - 0'',013 \text{ sen } (2t - N).$$

I valori poi di a, b, π, ι, che hanno servito al calcolo numerico del valore di E presi dalla citata opera del sig. de Zach, sono i seguenti:

$a = 1°55'26'',666;\ \pi = 279°29'\ 0'',0$	$a = 1°55'\ 7'',84;\ \pi = 281°12'36'',6$
$b = \quad 1\ 12,688 \quad \iota = 23\ 27\ 56,7$	$b = \quad 1\ 12,32 \quad \iota = 23\ 27\ 4,6.$

99. Il tempo vero ed il tempo siderale, o astronomico soltanto, si possono direttamente osservare; il tempo medio devesi o dall' uno, o dall' altro osservato dedurre. Il tempo siderale, come lo abbiamo di sopra definito, vien indicato da un orologio, il quale noti $0^h\,0'\,0''$ allor-

quando l' equinozio di primavera passa pel meridiano, e compita la rotazione diurna, siano in esso scorse precisamente 24^h, ovvero abbia fatto 86400 oscillazioni. Un tale orologio indica ad ogni istante l'*AR* del mezzo del cielo, ossia di quel punto di equatore che trovasi sul meridiano, detto eziandio dagli Astronomi *punto culminante*. Il giorno vero ha il suo principio allorquando il centro del Sole passa pel meridiano, e reputasi compito quando egli vi ritorna. Sebbene irregolare sia la durata del giorno vero, pure egli vien diviso in 24 ore, e l'ora in 60', le quali saranno disuguali nelle diverse stagioni dell' anno. Una tale divisione del giorno riesce comoda in ciò che sembrando il Sole descrivere apparentemente il giro del cielo stellato in virtù del suo moto diurno in 24 ore, in ogni ora di tempo vero egli si allontanerà dal meridiano 15 gradi. Così il tempo vero ridotto in gradi dà l'angolo orario del Sole senza aver alcun riguardo al suo moto in *AR* dopo il passaggio pel meridiano, e viceversa se siasi osservata l'altezza del Sole, e col metodo del numero 21 si calcoli l'angolo orario del Sole, questo ridotto in tempo a ragione di 15° per ora, darà direttamente il tempo vero.

Il tempo vero direttamente osservato non è atto a regolare gli orologi, nè può comodamente confrontarsi col moto uniforme del pendolo. Così tutte le volte che un qualunque fenomeno è stato osservato ad un dato istante di tempo vero, convien per il medesimo istante calcolare l'equazione del tempo, mediante la quale tosto deducesi il tempo medio. A facilitare il calcolo dell' equazione del tempo gli Astronomi nelle annue loro Effemeridi ne inseriscono il suo valore per ogni giorno dell' anno a mezzodì, ed essendo le sue diurne variazioni sempre molto piccole e regolari, se ne può con una facile interpolazione dedurre la quantità per un' ora qualunque di ogni giorno.

Un orologio dicesi *regolato sul tempo medio* allorquando segna $0^h\ 0'\ 0''$ nell'istante, in cui il Sole medio passa pel meridiano. Quindi se in un orologio osservisi l'istante del mezzodì vero mediante lo stromento dei passaggi, ed a questo aggiungasi l'equazione del tempo, dovrà la somma essere $= 0^h\ 0'\ 0''$ affinchè sia regolato sul tempo medio. Se ciò non accade, si avrà al tempo stesso l'errore del pendolo, il quale se sarà costante nei giorni consecutivi l'orologio segnerà 24^h medie precise nella durata del giorno medio; in caso diverso la serie degli errori darà l'accelerazione o ritardo del pendolo, e nel tempo stesso ci dimostrerà se il suo andamento è regolare.

100. Negli Osservatorj fissi i fenomeni celesti si osservano per lo più agli orologi regolati al tempo sidereo, perchè presentano essi immediatamente le *AR* degli astri, che giungono al meridiano. Rendesi quindi necessario insegnare il modo di convertire il tempo medio in tempo sidereo, e viceversa. A tale oggetto rappresenti *MN* (*Fig.* 11)

la direzione del meridiano, a cui tutti i punti dell' equatore celeste $\Upsilon\, m\, S\, S'$ si vanno successivamente presentando nella direzione $S''\, S'\, S\, m\, \Upsilon$ da oriente verso occidente. Sia per un istante qualunque di un determinato giorno Υ la posizione dell' equinozio, m la posizione del Sole medio, S il punto culminante. Pongasi

$S\Upsilon$ = tempo sidereo in gradi . . . . $= A$
$m\Upsilon = AR$ media del Sole dall' equin. apparente $= S$
$m\,S$ = tempo medio ridotto in gradi . . . . . $= T$

sarà evidentemente $A = S + T$, e quindi se A', S', T' saranno le stesse quantità espresse in tempo, avremo fra il tempo medio, il tempo sidereo, e l'AR del Sole l' equazione $A' = S' + T'$, dalla quale per un qualunque istante, dato il tempo medio T', e l'AR del Sole $= S'$, si avrà il tempo sidereo A'; o viceversa dato il tempo sidereo A', e l'AR media del Sole S', si avrà il tempo medio T' per l' equazione $T' = A' - S'$.

101. Questa stessa regola serve a trovare il tempo medio, in cui una stella di nota AR perverrà al meridiano. In fatti in questo caso sarà $A' = AR$ di data stella ridotta in tempo, ed S' uguale AR media di Sole per questo cercato istante. Converrebbe pertanto conoscere l'AR media del Sole per il tempo medio cercato. Per facilitare questo calcolo nelle Effemeridi astronomiche si riferisce per ogni giorno dell' anno a mezzodì medio l'AR media del Sole ridotta in tempo. Sia pertanto nel determinato giorno s l'AR media del Sole a mezzodì medio, ed m il suo aumento costante in 24^h di tempo medio. L' aumento di essa in T' ore di tempo medio sarà $= \frac{m\,T'}{24}$, e quindi in quel giorno sarà $S' = s + \frac{m\,T'}{24}$. Sostituito questo valore di S' nell' equazione $T' = A' - S'$, si otterrà $T' = \frac{24}{24 + m}(A' - s) \ldots (a)$ la quale darà il tempo medio corrispondente in quel giorno al tempo sidereo A'

La quantità $A' - s$ è evidentemente il numero delle ore siderali decorse dopo il mezzo giorno medio; quindi la quantità $\frac{24}{24 + m}$ è il rapporto della ora di tempo medio all' ora di tempo sidereo.

Il numero m è uguale all' aumento dell'AR media del Sole in 24^h di tempo medio ridotto in tempo. Ora essendo il moto diurno del Sole $= 59'\,8'',33$, sarà $m = 3'\,56'',5553 = 0^h,0657098$. Quindi il rapporto $\frac{24}{24 + m} = \frac{24}{24,0657098} = 0,9972696$. La precedente equazione (a) diverrà pertanto

$T' = 0{,}9972696\,(A' - s) = A' - s - 0{,}0027304\,(A' - s)$,
la quale somministra un mezzo molto spedito per la conversione delle ore $A' - s$ di tempo sidereo in tempo medio. Su questa formula sono fondate le tavole per la conversione del tempo sidereo in tempo medio.

Ponendo $A' - s = 1^h$, sarà $T' = 1^h - 9'',83 = 0^h\,59'\,50'',17$. E ponendo $A' - s = 24^h$, avremo $T' = 24^h - 3'\,55'',91 = 23^h\,56'\,4'',09$ tempo medio corrispondente a 24 ore di tempo sidereo.

102. Viceversa, se di una stella qualunque siasi osservato il passaggio al meridiano in tempo medio, si otterrà il tempo sidereo A' per l'equazione $A' = s + \frac{24 + m}{24}\,T' = s + T' + 0{,}0027379\,T'$, dalla quale otterrassi l'AR A' quando si conosca il passaggio al meridiano in tempo medio, e l'AR media del Sole a mezzodì medio. Di qui ancora apparisce, che $A' - s$ è il numero delle ore siderali decorse dopo il mezzodì medio ad un tempo medio T'. Se ora ponghiamo $T' = 24$, si troverà $A' - s = 24^h\,3'\,56'',55$, donde ne segue che 24 ore di tempo medio corrispondono a $24^h\,3'\,56'',55$ di tempo sidereo, ed un'ora di tempo medio equivale a $1^h\,0'\,9'',8564$ di tempo siderale, vale a dire in un'ora di tempo medio la sfera celeste si ravvolge in grazia del moto diurno di $15°\,2'\,27'',85$. Il tempo medio pertanto ridurrassi in gradi dell'equatore a ragione di $15°\,2'\,27'',85$ per ogni ora. Così, a cagion d'esempio, se si sarà osservato l'angolo orario di una stella fissa, per avere il tempo medio scorso dopo il suo passaggio pel meridiano, si dovrà ridurre quest'angolo orario in tempo non già a ragione di 15° per ora, ma bensì di $15°\,2'\,27'',85$ per ogni ora.

103. Vogliasi ora determinare più generalmente il passaggio al meridiano di un astro, la cui AR è giornalmente calcolata nelle Effemeridi per un dato istante di tempo medio, per es., per mezzodì medio, e varj questa di una quantità diurna m'. Sia come sopra A' l'AR dell'astro quando egli passa pel meridiano ridotta in tempo; T' il tempo medio del suo passaggio pel meridiano; A l'AR del medesimo astro a mezzodì medio ridotta in tempo; s l'AR media del Sole a mezzodì medio ridotta pure in tempo. Sarà $A' = A + \frac{m'\,T'}{24}$, $S' = s + \frac{m\,T'}{24}$. Quindi l'equazione $T' = A' - S'$ diverrà
$T' = A - s + \frac{(m' - m)}{24}\,T'$, donde rilevasi
$T' = \frac{24\,(A - s)}{24 - (m' - m)} = A - s + \frac{(m' - m)\,(A - s)}{24 - (m' - m)}$, nella quale for-

mula i movimenti m', m nel *AR* dell'astro e del Sole si esprimeranno in parti decimali di ora per maggiore semplicità.

Se l'*AR* dell'astro in vece di aumentare diminuisse giornalmente, vale a dire se l'astro fosse retrogrado, si dovrebbe nella formula precedente fare m' negativo.

Del rimanente convien osservare che questa formula suppone il moto diurno in *AR* costante. Essa può con vantaggio applicarsi nel calcolo del passaggio dei pianeti pel meridiano, ma per la Luna, il cui movimento è molto irregolare, porge soltanto un valore al vero prossimo, trovato il quale determinerassi con maggior precisione l'*AR* della Luna, e di questa ci serviremo per correggere l'istante della sua culminazione.

104. Termineremo questo articolo intorno alla misura del tempo coll'indicare i metodi, dei quali si servono gli Astronomi per osservare il tempo, e determinare l'errore di un orologio regolato tanto sul tempo medio, quanto sul tempo sidereo.

1.° *Coll'osservazione del passaggio pel meridiano di astri conosciuti*. Se mediante lo stromento dei passaggi avrete osservato ad un orologio il mezzo giorno vero, applicategli l'equazione del tempo, ed avrete il mezzo giorno medio al medesimo orologio; la differenza del tempo notato dall'orologio a mezzodì medio con $0^h\ 0'\ 0''$ darà l'errore del pendolo quando sia regolato sul tempo medio; e se sia esso regolato sul tempo sidereo la differenza fra il mezzodì vero osservato, e l'*AR* vera del Sole è l'errore dell'orologio.

Se avrete osservato il passaggio di una data stella pel meridiano ad un orologio regolato al tempo sidereo, la differenza fra il passaggio osservato, e la nota *AR* apparente dell'astro darà l'errore dell'orologio. Che se l'orologio fosse regolato al tempo medio, calcolerete il passaggio della stella pel meridiano in tempo medio dietro le regole precedenti, e questo confrontato con l'osservato darà l'errore dell'orologio.

2.° *Colle altezze corrispondenti del Sole, o di una data stella*. Se chiamiamo l la latitudine dell'osservatorio, δ la declinazione di un astro qualunque, P il suo angolo orario, h la sua altezza sopra l'orizzonte, si è trovato mediante il triangolo fatto al polo dell'equatore, al zenit, ed all'astro la seguente equazione 20

$$\text{sen}\ h = \text{sen}\ l\ \text{sen}\ \delta + \cos l \cos \delta \cos P,$$

dalla quale risulta, che conservando le quantità δ e P lo stesso valore, h rimane lo stesso, e quindi per uno stesso astro la cui declinazione rimanga invariabile, ad angoli uguali da una parte e dall'altra del meridiano corrispondono uguali altezze sopra l'orizzonte. Donde risulta il seguente metodo semplicissimo per determinare ad un orologio qualunque il momento, in cui un dato astro sarà passato pel meridiano.

Osservate ad un quadrante mobile il momento, in cui l'astro trovasi ad una qualunque altezza h *prima del suo passaggio pel meridiano; quindi dopo il passaggio pel meridiano, l'altezza dell'astro principiando a diminuire, osservate di nuovo l'istante, in cui sarà ritornato alla medesima altezza* h; *la semisomma dei tempi notati dall'orologio darà l'ora segnata dal medesimo quando egli passava pel meridiano.*

Si osservano d'ordinario più altezze, le quali si segnano avanti il passaggio al meridiano nel quadrante, e siano fra loro distanti di 10' in 10' di altezza, ovvero di 20' in 20'; e quindi dopo il passaggio pel meridiano presentandosi l'astro alle medesime altezze osservate alla mattina in ordine inverso, si notano i rispettivi tempi. Le semisomme dei tempi corrispondenti alle stesse altezze dovrebbero coincidere senza gli errori inevitabili delle osservazioni. Non coincidendo, si prende di tutti i risultamenti il medio per ottenere con maggiore probabilità il vero momento del suo passaggio pel meridiano nell'orologio.

Questo metodo è pregievolissimo non dipendendo l'esattezza del risultamento dagli errori dello stromento nelle divisioni meccaniche del circolo, lo che fa sì che nella ricerca dell'errore dell'orologio adoprare si possano anche dei mediocri stromenti.

Il metodo delle altezze corrispondenti porge direttamente il passaggio dell'astro pel meridiano, quando la sua declinazione resta inalterabile nell'intervallo delle osservazioni fatte avanti e dopo il meridiano. Così non si può applicare senza ulteriori correzioni che alle stelle fisse, il Sole ed i pianeti cambiando nello spazio di poche ore sensibilmente di declinazione.

In virtù di questo cambiamento di declinazione l'angolo orario avanti il meridiano non è più uguale all'angolo orario dopo il passaggio pel meridiano corrispondente alla medesima altezza h. Se pertanto il primo angolo orario appellisi P ed il secondo $P + dP$, il loro medio sarà $P + \frac{1}{2} dP$. Quindi il tempo notato dall'orologio nella prima osservazione essendo t, è evidente che il medio delle altezze corrispondenti dinota un tempo tale, a cui nell'orologio corrisponde l'ora $t + P + \frac{1}{2} dP$. Ma il passaggio al meridiano ha avuto evidentemente luogo al tempo $t + P$. Dovrassi quindi dall'indicato medio sottrarre la correzione $\frac{1}{2} dP$ per ottenere il vero passaggio pel meridiano dell'astro, la cui declinazione è variabile.

Sia pertanto $d\delta$ il moto dell'astro in declinazione fra le due osservazioni, e dP la variazione corrispondente dell'angolo orario; quantità che ambedue si riguarderanno così piccole, che le loro superiori potenze siano trascurabili. Avremo, differenziando l'equazione $\text{sen}\, h = \text{sen}\, l \,\text{sen}\, \delta + \cos l \cos \delta \cos P$ nell'ipotesi di δ e P variabili

$dP = (\text{tang}\, l - \text{tang}\, \delta \cos P) \dfrac{d\delta}{\text{sen}\, P}$, la quale divisa per 2, e ridotta in tempo, dà la cercata correzione $\mp dP = (\text{tang}\, l - \text{tang}\, \delta \cos P) \dfrac{d\delta}{30\, \text{sen}\, P}$.

Questa formula può servire pel Sole e pei pianeti, il moto diurno dei quali in declinazione non è molto considerabile. Ma non si potrebbe applicare alla Luna, il cui movimento diurno è forte ed irregolare. Essendo utilissima e comunissima l'applicazione di questo metodo al Sole per determinare il mezzodì vero, così nelle tavole solari si trova d'ordinario la formula precedente ridotta in due tavole a doppia entrata, mediante le quali con somma facilità si prende il valore della correzione $\mp dP$, a cui gli Astronomi danno il titolo di *equazione delle altezze corrispondenti.*

Conosciuto poi il passaggio dell'astro pel meridiano in tempo dell'orologio, si confronterà col calcolato, e si avrà la correzione dell'orologio sia egli regolato al tempo sidereo, o al tempo medio.

3.° *Colle altezze osservate del Sole, o di un dato astro.* Quando si abbia un buon istromento per osservare le altezze di un astro qualunque, col mezzo di questo avendo osservato l'altezza di un dato astro, ed il tempo notato dall'orologio all'istante dell'osservazione, si può sempre determinarne l'errore. A tale oggetto correggasi quest'altezza dall'effetto della refrazione e della paralasse (se si tratta del Sole, o di un pianeta). Quindi per il momento dell'osservazione (che presso a poco sempre si conoscerà facilmente) si calcoli la declinazione dell'astro. Un errore nel tempo di un minuto, o due non influisce sensibilmente nel calcolo della declinazione del Sole, o dei pianeti. Se si tratta di stelle fisse la declinazione è più facile a calcolarsi, giacchè si prende da un catalogo, e vi si applica l'effetto dell'aberrazione della luce e della nutazione. Conosciuta poi l'*AR* apparente, la declinazione e l'altezza di polo, si calcola l'angolo orario corrispondente mediante le formule date nel capit. II § 21. Trovato l'angolo orario, se si tratta di una stella osservata coll'orologio sidereo, si aggiunga quest'angolo orario ridotto in tempo a 15° per ora alla sua *AR*: se è avanti il passaggio al meridiano, o se ne sottragga, se è dopo il medesimo passaggio, e si otterrà l'ora segnata dall'orologio quando trovavasi nel meridiano. Confrontata questa con la sua *AR* ridotta in tempo, si avrà l'errore del pendolo. Che se l'orologio sarà regolato sul tempo medio, l'angolo orario si ridurrà in tempo a ragione di 15° 2′ 27″,85 per ora. Il tempo che ne risulta aggiunto o sottratto dal tempo notato dall'orologio all'istante dell'osservazione, porge il suo passaggio pel meridiano, che confrontato col passaggio calcolato in tempo medio darà l'errore cercato.

Se poi si tratta del Sole; se l'orologio era regolato al tempo medio aggiungete, o sottraete da $0^h\ 0'\ 0''$ l'angolo orario ridotto in tempo a ragione di 15° per ora, secondo che l'osservazione fu fatta avanti o dopo mezzo giorno. Avrete il tempo vero dell'osservazione, a cui applicherete l'equazione del tempo, ed avrete il tempo medio corrispondente, che confrontato con quello notato dall'orologio darà l'errore del medesimo. Quando l'orologio sia regolato sul tempo siderale calcolerete egualmente il tempo medio corrispondente alla fatta osservazione; quindi lo convertirete in tempo siderale per i precetti dati superiormente, e questo paragonato al tempo osservato darà ancora l'errore dell'orologio.

CAPITOLO VIII.

Della costruzione delle tavole solari, e del modo di rettificarle.

105. Le tavole solari presentano un metodo facile e spedito di calcolare per un tempo qualunque la posizione del Sole. Nel calcolo di un luogo di Sole si può desiderare 1.° la sua longitudine vera; 2.° la sua distanza dalla terra, o almeno il suo logaritmo; 3.° il suo diametro apparente; 4.° la sua velocità in longitudine per un'ora di tempo medio; 5.° la sua *AR*; 6.° la sua declinazione; 7.° l'obbliquità dell'ecclittica. Devono pertanto le tavole solari presentare tutti questi diversi oggetti con molta facilità. Dietro le formule precedenti aggiungendovi quelle piccole correzioni, che somministra la teoria delle perturbazioni planetarie, si costruiscono le tavole solari, e si dà loro presso a poco la seguente disposizione.

Avendo osservato l'istante dell'equinozio di primavera in tempo solare medio, e conoscendo la longitudine del perigeo, si formi la quantità 0° — longit. di perigeo, e sarà questa l'anomalia vera corrispondente all'osservato equinozio. Mediante le formule del § 90 si calcoli l'anomalia media corrispondente che sia $= z$; sarà $z +$ long. di perigeo = longit. media di Sole. Si noti il numero dei giorni e parti di giorni decorsi dal principio di quell'anno fino all'osservato equinozio, e si moltiplichi per 59′ 8″,33. L'arco che ne risulta, tolto dalla trovata longitudine media, darà la longitudine media al principio dell'anno, alla quale gli Astronomi danno il nome di *epoca dei moti medj*.

Se a questa epoca si aggiunga successivamente il moto annuo si formeranno le epoche per gli anni susseguenti, e se si toglie si avranno le epoche o longitudini medie al principio degli anni precedenti.

Calcolate il moto medio del Sole per tutti i giorni dell'anno, unitevi i moti del perigeo, l'obbliquità dell'ecclittica con il suo moto annuo, ed avrete le tavole dei moti medj.

Per ogni grado di anomalia media calcolate l'equazione del centro ed il raggio vettore, con le variazioni secolari dell'una e dell'altro; aggiungetevi le tavole delle perturbazioni secondo le teorie che si danno nella meccanica celeste. Avrete così le tavole solari atte a porgere il luogo del Sole nell'ecclittica. Vi aggiungerete una tavola dei diametri e del moto orario.

Se si chiama r la distanza del Sole dalla terra, 2δ il diametro del Sole alla media distanza, sarà diametro di Sole $= \frac{2\delta}{r}$.

Per avere il moto orario, si riprenda l'equazione $r^2 dv = ab\, dz$ (§ 90), e vi si ponga $a = 1$, $b = \sqrt{(1 - e^2)}$, $e = 0{,}0168$, $dz = \frac{59'\ 8'',33}{24}$ (moto orario medio); si avrà il moto orario vero dall'equazione $dv = \frac{147'',827}{r^2}$.

Conoscendo poi la longitudine e l'obbliquità dell'ecclittica, l'AR e la declinazione si potranno facilmente calcolare per le seguenti formule di Trigonometria

tang di AR di $\odot$ = cos di obbliq. $\times$ tang di longitud. di $\odot$
sen di decl. di $\odot$ = sen di obbliq. $\times$ sen di longitud. di $\odot$

Nella maggior parte delle tavole solari si trova calcolata eziandio la differenza fra la longitudine e l'AR mediante la formula

$\alpha - L = -\theta \,\text{sen}\, 2L + \frac{\theta}{2} \,\text{sen}\, 4L - \frac{\theta}{3} \,\text{sen}\, 6L$ ec. data nel § 98.

Col mezzo di questa differenza, alla quale gli Astronomi danno il nome di *riduzione dell'ecclittica all'equatore*, tosto si trova il valore di α. Noi non ci diffonderemo di più nella spiegazione delle tavole solari, giacchè in fronte ad ogni tavola trovasi d'ordinario la sua particolare costruzione.

106. L'esattezza delle tavole solari dipende dalla precisione con cui, mediante le osservazioni, avremo determinato gli elementi della sua orbita, vale a dire dal tempo del passaggio del Sole per l'equinozio, e dalla posizione dello stesso nel cielo stellato, dalla obbliquità dell'ecclittica, dalla posizione del perigeo, e dalla grandezza dell'eccentricità dell'orbita solare. Conviene pertanto nella determinazione di ciascuno di essi far concorrere il maggior numero possibile di osservazioni, avendo inoltre cura di sceglierle opportunamente, perchè gli errori degli altri elementi non influiscano sensibilmente in quello che si vuol determinare. Così avendo ottenuto di ciascun elemento in

particolare una serie di risultamenti, i quali accordar si dovrebbero senza gli errori inevitabili delle osservazioni, noi prenderemo di essi il medio, ed otterremo un risultamento tanto più probabilmente vero, che avremo ritenuto un maggior numero di buone osservazioni.

E prima di tutto i metodi esposti nel capitolo VI per determinare la posizione dell' apogeo e del perigeo, e la quantità dell' eccentricità sono suscettibili di tutta la precisione, potendosi nella determinazione loro introdurre un indeterminato numero di longitudini vere osservate. Nella loro applicazione ai numeri si richiede che sia ben conosciuto il moto diurno medio, il quale con molta precisione si può ottenere dal confronto dell' osservazione di due equinozj in epoche lontanissime, come nel § 82.

L' esattezza adunque della posizione del perigeo, e dell' eccentricità dipende totalmente dall' esattezza delle longitudini vere del Sole osservate ed impiegate, come nel capit. VI è stato indicato.

Una longitudine di Sole si può in tre maniere ottenere: 1.° mediante l' osservata declinazione, nota essendo l' obbliquità dell' eclittica; 2.° mediante l'*AR* osservata, e la nota obbliquità dell' eclittica; 3.° mediante l'*AR* e la declinazione osservata. Nello stato attuale dell' Astronomia, avendo dei cataloghi di stelle molto esatti, tutti tre questi metodi sono egualmente atti a bene osservare le longitudini del Sole. Quando poi tali cataloghi mancassero, al primo metodo appoggiar si dovrebbe interamente la teoria del Sole, non dipendendo l' osservazione delle declinazioni, che dalla sola latitudine dell' osservatorio, la quale si può sempre molto esattamente determinare, mediante le altezze meridiane delle stelle circompolari.

107. Quando dalle distanze meridiane del centro del Sole dal zenit dedur se ne vuole la declinazione, conviene prima di tutto applicare a quelle la refrazione e la paralasse. Della refrazione parleremo in un capitolo apposito, e daremo generalmente la teoria delle paralassi nella teoria della Luna, ove esporremo anche il modo di osservarle, e liberare le osservazioni dal loro effetto. Ivi dimostreremo che la correzione da farsi alle distanze del Sole dal zenit per conto delle paralassi è $= 8'',6 \text{ sen } Z$, esprimendo Z la distanza osservata. Così se r indica la rifrazione astronomica alla distanza Z dal zenit, la distanza corretta dalla rifrazione e dalla paralasse sarà $= Z + r - 8'',6 \text{ sen } Z$, e chiamando L la latitudine dell' osservatorio, δ la declinazione del Sole, si avrà $\delta = L - Z - r + 8'',6 \text{ sen } Z$.

108. Per determinare con molta precisione l' obbliquità dell' eclittica convien far concorrere tutte le declinazioni osservate nei contorni del solstizio allo stesso oggetto.

Sia perciò δ una declinazione del Sole nelle vicinanze del solstizio, l la longitudine corrispondente, sia essa dedotta dalle osserva-

zioni, o da una tavola del Sole; ε l'obbliquità dell'ecclittica presso a poco conosciuta, e potremo prendere per ε il suo valore prossimo 23° 28'. Avrà luogo l'equazione $\text{sen}\,\delta = \text{sen}\,\varepsilon\;\text{sen}\,l$, nella quale l sarà prossimo a 90°, e quindi δ molto vicino ad ε. Se differenziamo questa equazione avremo $d\delta\cos\delta = d\varepsilon\cos\varepsilon\;\text{sen}\,l + \text{sen}\,\varepsilon\cos l\,d\,l$, dalla quale apparisce che una piccola variazione nella longitudine l non influisce sensibilmente nel valore di δ, e quindi un piccolo errore nella longitudine non molto influirà nella determinazione di ε, il quale si può in conseguenza dedurre con tutta precisione dall'equazione $\text{sen}\,\varepsilon = \dfrac{\text{sen}\,\delta}{\text{sen}\,l}$.

A determinare il valore di ε si può anche adoperare una serie molto convergente, che io ricavo nel seguente modo. Nell'equazione $\text{sen}\,\delta = \text{sen}\,\varepsilon\;\text{sen}\,l$, pongasi $l = 90 - u$; sarà nelle vicinanze del solstizio u un piccolo arco. Pongasi $\delta = \varepsilon - x$, ed x pure, per ciò che precede, sarà una quantità anche molto più piccola. L'equazione precedente con un poco d'attenzione si può scrivere sotto la forma $\dfrac{\text{sen}\,\varepsilon - \text{sen}\,(\varepsilon - x)}{\cos\varepsilon} = 2\,\text{tang}\,\varepsilon\;\text{sen}^2\tfrac{1}{2}u$, la quale confrontata con la formula $\dfrac{\text{sen}\,A - \text{sen}\,B}{\cos A} = v$ (Trig. III), dalla serie (2) ottenghiamo

$$x = 2\,\text{tang}\,\varepsilon\;\text{sen}^2\tfrac{1}{2}u - 2\,\text{tang}^3\varepsilon\;\text{sen}^4\tfrac{1}{2}u + \frac{4(1+3\,\text{tang}^2\varepsilon)}{3}\,\text{tang}^3\varepsilon\;\text{sen}^6\tfrac{1}{2}u \ldots$$

la qual serie a motivo della piccolezza di u è molto convergente.

Questa serie si può ancora ordinare per le potenze di u, e fatte le opportune riduzioni si avrà

$$x = \frac{\text{tang}\,\varepsilon}{2}\,u^2 - \frac{\text{tang}\,\varepsilon + 3\,\text{tang}^3\varepsilon}{24}\,u^4 + \frac{\text{tang}\,\varepsilon + 30\,\text{tang}^3\varepsilon + 45\,\text{tang}^5\varepsilon}{720}\,u^6 \ldots$$

nella quale tanto il primo quanto il secondo membro suppongonsi ridotti in parti di raggio. Che se si desidera x espresso in secondi, e si ha u espresso in secondi, è chiaro che posto il numero dei secondi contenuti nel raggio $= R''$, si dovrà in luogo di u^2, u^4, u^6 scrivere $\dfrac{u^2}{R''}$, $\dfrac{u^4}{R''^3}$, $\dfrac{u^6}{R''^5}\ldots$ Che se invece porremo l'arco u espresso in decine di minuti primi, converrà in luogo di u scrivere $600\,u$. In questa ipotesi si otterrà

$$x = \frac{(600)^2\,\text{tang}\,\varepsilon}{2\,R''}\,u^2 - \frac{(\text{tang}\,\varepsilon + 3\,\text{tang}^3\varepsilon)(600)^4}{24\,R''^3}\,u^4 \ldots \text{ ec.}$$

la quale, posto $\varepsilon = 23°\ 28'$, si riduce a

$$x = 0'',378842\,u^2 - 0'',00000041817\,u^4 \ldots \text{ ec.} \ldots (a)$$

e quindi la vera obbliquità dedotta dalla osservata declinazione δ sarà

$$\iota = \delta + 0'',378842\, u^2 - 0'',00000041817\, u^4 \ldots$$

essendo u la distanza del Sole dal solstizio ridotta in diecine di minuti.

Questa formula è esatta anche ponendo $u = 60$, come facilmente uno potrà convincersi calcolando il terzo termine della serie generale. Quindi col suo mezzo si potranno ridurre al solstizio le osservate declinazioni nei dieci giorni precedenti, e seguenti il giorno del solstizio.

Nel calcolo dei coefficienti numerici di u^2, u^4 ec. si è assunto $\iota = 23° 28'$. La variazione di x per un aumento in ι di una quantità $d\iota$, è (non tenendo conto che del primo termine, come il più forte) $= \frac{2\, d\iota}{\text{sen}\, 2\iota}\, x$. Quindi se sarà x espresso in secondi, e ponendo

$d\iota = -100'' = \frac{-100}{R''}$ (in parti di raggio) avremo

correz. di x per una diminuz. in ι di $100'' = -0,00152724\, x$,
essendo x dato dalla formula (a) in secondi di grado.

109. Essendo bene determinata l'obbliquità dell'ecclittica, l'equazione $\text{sen}\, l = \frac{\text{sen}\, \delta}{\text{sen}\, \iota}$ ci darà pure la longitudine del Sole con molta precisione. Ce ne potremo particolarmente servire con vantaggio per determinare l'errore delle tavole solari nei giorni che precedono e seguono l'equinozio. Preso il medio degli errori parziali ottenuti, si correggerà con questo la longitudine data dalle tavole, donde con facile interpolazione si otterrà il tempo medio del passaggio del Sole per l'equinozio.

Nello stato attuale delle tavole solari, in cui sono determinate con molta precisione l'eccentricità, il moto medio ed il perigeo, l'errore delle tavole non può dipendere che dall'epoca. Quindi l'errore medio delle tavole nell'osservazione di un equinozio porge immediatamente la correzione dell'epoca dei moti medj.

110. Quando siasi osservata la longitudine del Sole nelle vicinanze dell'equinozio in un determinato giorno, se ne può dedurre la sua AR, e quindi, confrontando la posizione del Sole con una qualche stella fissa, facilmente si determinerà la sua ascensione retta, col mezzo della quale si otterranno poi quelle delle altre stelle per formarne un catalogo.

Due equinozj osservati e calcolati nel modo precedente per epoche lontanissime somministreranno la durata della rivoluzione tropica del Sole; e se nel tempo stesso avremo determinato le longitudini di alcune principali stelle per le medesime epoche, otterremo dal loro confronto la esatta misura della precessione annua dell'equinozio, don-

de poi facilmente coi metodi spiegati nel capit. VI si dedurrà la durata della rivoluzione siderale del Sole.

111. Quando gli elementi della ellisse solare sono stati determinati con qualche precisione in virtù dei metodi precedenti, si può far concorrere alla determinazione dell'eccentricità, dell'epoca, e della longitudine del perigeo un numero indefinito di osservazioni col seguente metodo. Sia l la longitudine data dalle tavole; t la longitudine media delle tavole, la quale contenga il solo errore dell'epoca; π la longitudine del perigeo, e l'eccentricità. Dalle cose precedenti si ha

$$l = t + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\operatorname{sen}(t-\pi) + \frac{5}{4}e^2\operatorname{sen}2(t-\pi) + \frac{13}{12}e^3\operatorname{sen}3(t-\pi)\ldots$$

Se i valori delle quantità t, e, π contengono un qualche piccolo errore, rappresentiamo per $t+dt$, $e+de$, $\pi+d\pi$ i loro veri valori, e sia $l+dl$ il valore della longitudine che gli corrisponde. Sarà dl la piccola correzione delle tavole, e quindi rappresentando per l' la longitudine del Sole osservata sarà $dl = l' - l$. Ora dalla precedente equazione si ha

$$dl = dt[1 + 2e\cos(t-\pi)] + [2\operatorname{sen}(t-\pi) + \frac{5}{2}e\operatorname{sen}2(t-\pi)]\,de$$
$$-\,2e\cos(t-\pi)\,d\pi,$$

trascurando gli altri termini come molto più piccoli.

Se adunque per ogni osservazione ridurremo, mediante le tavole già costruite, a numeri i coefficienti di dt, de, $d\pi$, ed eguaglieremo il risultamento all'errore osservato $l'-l$ delle tavole stesse, noi otterremo una serie di equazioni illimitata della forma
$A\,dt + B\,de + C\,d\pi = N$; dalle quali si ricaveranno i valori delle correzioni dt, de, $d\pi$.

Per risolvere le equazioni di questa specie nel modo il più vantaggioso, ed in maniera che i piccoli errori delle osservazioni non influiscano sensibilmente nel risultamento, si servono gli Astronomi di due metodi, il primo dei quali consiste nel sommare tutte le equazioni dopo di aver reso positivi successivamente tutti i coefficienti delle indeterminate. Si formeranno così tante equazioni quante sono le indeterminate stesse, le quali si risolveranno colle regole pelle equazioni di primo grado prescritte.

Il secondo metodo conosciuto sotto il nome di *metodo dei minimi quadrati* consiste nel rendere un minimo la somma dei quadrati degli errori delle tavole. Un tal metodo sembra stato proposto per la prima volta dal signor le Gendre, quantunque anche Gauss se ne fosse già servito precedentemente. Ai celebri matematici Gauss e la Place si deve però la rigorosa dimostrazione della insigne proprietà di questo metodo, che cioè gli errori delle osservazioni abbiano nelle deter-

minazioni delle incognite la minore possibile influenza. Noi per la dimostrazione di questa proprietà rimandando alle opere dei citati matematici Gauss (*Theoria motus corporum caelestium etc. Hamburgi* 1809) e la Place (*Theorie complette des probabilités etc. Paris* 1813), ci contenteremo di esporre in che propriamente esso consista.

Sia una serie di equazioni di primo grado della forma

$$a x + b y + c z + \ldots = n; \quad a' x + b' y + c' z + \ldots = n'; \text{ ec.}$$

la somma dei loro quadrati (ponendo $n^2 + n'^2 + \ldots = \Omega$) darà

$$(a x + b y + c z \ldots)^2 + (a' x + b' y + c' z \ldots)^2 + \ldots = \Omega.$$

Se questa quantità dovrà divenire minima, avremo per la nota teoria dei massimi e minimi le equazioni $\frac{d\Omega}{dx} = 0$, $\frac{d\Omega}{dy} = 0$, $\frac{d\Omega}{dz} = 0$ ec., le quali si cangiano, dietro le opportune riduzioni, nelle seguenti

$$x(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots) + y(ab + a'b' + a''b'' + \ldots) + z(ac + a'c' + a''c'' + \ldots) = 0$$
$$x(ab + a'b' + a''b'' \ldots) + y(b^2 + b'^2 + b''^2 \ldots) + z(bc + b'c' + b''c'' \ldots) = 0$$
$$x(ac + a'c' + a''c'' \ldots) + y(bc + b'c' + b''c'' \ldots) + z(c^2 + c'^2 + c''^2 \ldots) = 0$$

Essendo tante di numero quante sono le variabili x, y, z, ben si vede che si potranno esse risolvere coi metodi delle equazioni di primo grado.

Con questi metodi, avendo l' opportuno riguardo alla teoria delle perturbazioni, in virtù della grande esattezza introdotta in questi ultimi tempi nelle osservazioni, le tavole solari sono state portate ad una tale precisione, di cui non è appena lecito sperarne una maggiore.

Le principali tavole solari dei nostri giorni sono quelle dovute alle indefesse cure dei celebri astronomi Zach, de Lambre e Carlini. Quelle del signor Carlini furono per la prima volta pubblicate nelle Effemeridi astronomiche di Milano pel 1810, e sono sommamente commendevoli per la loro esattezza, e per la comodissima loro disposizione.

CAPITOLO IX.

Della distanza del Sole dalla terra, e del suo diametro. Della sua rotazione intorno al proprio asse.

112. **D**opo di aver esposto con sufficiente estensione la teoria dei movimenti solari, ragion vuole che facciamo parola della sua distanza riportata alle nostre misure terrestri, del suo diametro, e della sua fisica costituzione. E prima di tutto rilevasi la distanza dalla cognizione della sua *paralasse orizzontale*.

(*Fig.* 23) Sia in fatti S il Sole, ATB rappresenti la terra no-

stra, A il luogo di un osservatore, il cui zenit sia in Z. Trovisi il centro del Sole in S all'orizzonte; se al tempo stesso fingiamo un secondo osservatore, il quale lo osservi dal centro C della terra, l'angolo ACS appellasi *paralasse orizzontale*. Un tal angolo è uguale a quello sotto, di cui un osservatore al centro del Sole vedrebbe il semidiametro terrestre, e ben si comprende, che quanto più quest'angolo è piccolo, tanto maggiore è la distanza del Sole dal centro della terra.

Ora è chiaro, che posto l'angolo $S = p$, $AC = r$, $SC = d$ avremo $\operatorname{sen} p = \frac{r}{d}$, donde risulta la cercata distanza $d = \frac{r}{\operatorname{sen} p}$.

Apparisce da ciò, che restando r costante, il seno della paralasse varia in ragione inversa della distanza. Se adunque siasi osservata la paralasse orizzontale al momento, in cui trovavasi nella distanza media dalla terra, la formula $d = \frac{r}{\operatorname{sen} p}$ darà il valore della distanza media del Sole dalla terra espressa in quelle stesse unità, in cui sarà espresso r.

113. Si vedrà nella teoria della Luna il modo di osservare la paralasse orizzontale di un astro. Dietro molte osservazioni, e dietro molti confronti si è trovato essere la paralasse orizzontale del Sole nella sua media distanza $= 8'',8$. Le sue variazioni dipendenti dalla variazione della distanza sono sempre piccolissime, per la piccola variazione delle distanze medesime. Di fatti secondo le tavole del sig. de Lambre la massima paralasse solare è di $8'',95$, e la minima di $8'',65$. Saranno pertanto le corrispondenti distanze espresse come segue

massima $= 23845,64\ r = 81975100$ Miglia comuni ita-
minima $= 23046,34\ r = 79227500$ liane di 60° per
media $= 23445,99\ r = 80601300$ ogni grado.

Queste distanze sono enormi se si riferiscono alle nostre piccole misure itinerarie; pure divengono quasi evanescenti in confronto della immensa distanza delle stelle fisse, come avremo luogo di osservare altrove.

114. Conosciuta la distanza media del Sole dalla terra, ed il semidiametro corrispondente, se ne deduce tosto il rapporto fra il raggio terrestre ed il raggio solare. In fatti chiamando d la distanza media del Sole, δ il semidiametro osservato, R il suo raggio, avremo $\operatorname{tang} \delta = \frac{R}{d}$; quindi $R = d \operatorname{tang} \delta$.

Ponendo pertanto $r = 1$, sarà $d = 23446$, ed assumendo $\delta = 961'',4$ avremo $R = 109,28$, ed essendo i volumi del Sole e della terra, supposti ambedue sferici, come i cubi dei loro raggi, sarà il Sole $= 1305130$ la terra nostra. Per il resto queste dimensioni variano

notabilmente per una piccola variazione nel valore di δ e di p. Comunque però sia, resta così dimostrato essere il Sole un corpo immensamente più grande della terra, e degli altri pianeti, dei quali daremo in progresso i diametri assoluti, ed i loro volumi.

Macchie solari.

115. Osservando il Sole con un cannocchiale, si scuoprono molte volte delle macchie nella sua superficie, le quali a vero dire non presentano tutta quella regolarità ed invariabilità, che tanto si ammira negli altri celesti fenomeni. In fatti tali macchie molte volte apparvero nel bordo orientale del Sole, ed avanzandosi gradatamente scomparvero al lembo occidentale, avendo impiegato circa 14 giorni ad attraversarne il disco; dopo 14 giorni circa ritornarono a comparire sul lembo orientale, dove prima si erano osservate, per riprendere la strada nella prima apparizione tenuta.

Accade spessissimo, che quella macchia sparita all'occidente inutilmente si aspetti poi nei seguenti giorni all'oriente; talvolta le macchie comparse ad oriente dopo essersi avanzate nel disco solare verso occidente sono scomparse prima di pervenire al lembo occidentale; spesso ancora si sono esse d'improvviso formate in mezzo al disco per isparire poi dalla parte d'occidente. Frattanto in mezzo a tutte queste irregolarità si è avuto luogo di rimarcare una qualche regolarità nei loro movimenti. 1.° Tutte si muovono da oriente verso occidente con direzioni paralelle, descrivendo sul disco solare delle curve simili nello stesso tempo, e variabili poi nelle diverse stagioni dell'anno, le quali hanno la somiglianza di ellissi più o meno aperte. 2.° Il tempo che impiegano ad attraversare il disco solare è di circa 14 giorni in tutte le stagioni dell'anno. In diversi anni in uno stesso mese le curve descritte da una stessa macchia sono identiche.

Le *figure* 24 rappresentano all'incirca le curve descritte dalle macchie sul disco solare nei mesi di Febbrajo, Marzo, Giugno, Luglio, Settembre e Dicembre. Vedesi da esse, che le macchie solari descrivono delle linee rette in Giugno e Dicembre, queste si vanno a poco a poco incurvando a forma d'ellissi, le quali sono della medesima apertura in punti dell'orbita solare diametralmente opposti, ma sono inversamente poste. Esse hanno la massima apertura nei mesi di Marzo e di Settembre.

116. Tutte queste apparenze si spiegano interamente ammettendo che il Sole si ravvolga intorno a se stesso nello spazio di circa 28 giorni ruotando intorno ad un asse inclinato al piano dell'ecclittica, e tale che l'occhio nostro si trovi in un piano a quest'asse perpendicolare nei mesi di Giugno e Dicembre, e negli altri mesi sia in un piano a questo più o meno inclinato.

Chiameremo *equatore solare* un circolo massimo della sfera celeste che passa pel centro del Sole, paralellamente a cui le macchie solari si concepiscono ravvolgersi, e questo incontrerà l'ecclittica in quei punti, nei quali trovasi il Sole in Giugno ed in Dicembre. Negli altri mesi essendo il nostro occhio più o meno elevato sopra di esso, i suoi paralelli progettati ortograficamente sul disco solare compariscono sotto la forma di ellissi più o meno aperte.

Non devono poi arrecare difficoltà le irregolarità menzionate sull'apparizione delle macchie, giacchè evidentemente queste altro non provano se non se che molte e grandi rivoluzioni accadono alla superficie del Sole. Diverse ipotesi hanno stabilito i filosofi per ispiegare quelle apparizioni e disparizioni delle macchie. Hanno alcuni assunto esser le macchie formate da una specie di schiuma ondeggiante nella materia ignea componente il Sole, e da essa qua e là trasportate; tale ipotesi non sembra poter ispiegare felicemente il paralellismo che conservano nella direzione del loro movimento più macchie comparse al tempo stesso, e la forma costante delle ellissi nei diversi mesi dell'anno.

Più conforme alla verità sembra l'ipotesi del celebre Herschel, il quale assume essere il Sole un corpo opaco ricoperto da una materia ignea, che vada estuando, e sottoposta a frequenti agitazioni e cambiamenti ci lasci talvolta vedere parte del nucleo solido ed opaco che essa ricopre.

Comunque sia di queste ed altre simili ipotesi, le seguenti proposizioni sempre c'insegneranno a dedurre dalle osservazioni la posizione dell'equatore solare, e la durata della sua rivoluzione.

*Problema I. Determinare mediante l'osservazione l'*AR*, e la declinazione di una macchia solare.*

117. Ad un orologio regolato al tempo medio si noti la differenza di passaggio al meridiano fra il centro del Sole ed il centro della macchia. Tale differenza ridotta in arco a ragione di 15" per ogni secondo di tempo darà la differenza di *AR* col centro del Sole.

Del pari la differenza fra la distanza meridiana del centro del Sole dal zenit, e quella del centro della macchia sarà la differenza di declinazione. Con tali differenze, data d'altronde l'*AR* e declinazione del Sole, si avrà la posizione della macchia rapporto all'equatore.

Scolio. Non essendo il centro del Sole un punto distinto nel suo disco da potersi direttamente osservare, conviene dall'osservazione medesima dedurre tanto il suo passaggio pel meridiano, quanto la sua distanza dal zenit. Essendo perciò il Sole trasportato, in virtù del suo moto diurno, da oriente verso occidente, si andranno presentando successivamente tutti i suoi punti al meridiano. Si notino perciò successivamente all'orologio il primo contatto del lembo occidentale del Sole,

l'appulso della macchia, e l'ultimo contatto del lembo orientale del Sole col filo meridiano. Si chiamino gl'istanti corrispondenti t, τ, t'; la differenza fra il passaggio della macchia al meridiano, ed il passaggio del Sole sarà evidentemente $= \tau - \frac{1}{2}(t + t')$, quantità che ridotta in arco sarà la differenza d'*AR* fra la macchia ed il centro del Sole, e la porremo $= d\,\alpha$.

Del pari se Z, z, Z' rappresentano le distanze dal zenit, del lembo superiore del Sole, della macchia e del lembo inferiore del Sole, la differenza di declinazione sarà $= \frac{1}{2}(Z + Z') - z$, quantità che porremo $= d\,\delta$.

Le distanze Z, z, Z' si dovrebbero osservare quando il centro del Sole trovasi nel meridiano; ma potendosi tali osservazioni fare dentro lo spazio di due minuti, la correzione, che vi si dovrebbe applicare, è insensibile, se si farà l'osservazione fra il minuto precedente ed il minuto seguente il passaggio del centro pel meridiano. Dovrebbero del pari queste tre distanze correggersi dall'effetto della paralasse, e della rifrazione astronomica. La prima correzione è inutile, essendo la stessa per tutte tre; la seconda lo è del pari, giacchè la rifrazione (a meno che il Sole non fosse molto vicino all'orizzonte dell'osservatore) non varia sensibilmente per tutto il diametro solare; e tanto più è inutile una tal correzione, in quanto che questo genere di osservazioni non è suscettibile di una somma precisione.

Chiamando pertanto α, δ l'*AR* e la declinazione boreale del Sole sarà . . . *AR* della macchia . . . $= \alpha + d\,\alpha$
declinazione della macchia. $= \delta + d\,\delta$.

Noi abbiamo supposto di fare le osservazioni quando il Sole si trova nel meridiano. Se l'osservatore sia munito di un buon cannocchiale con un micrometro, o di una buona macchina parallatica, egli potrà in qualunque ora del giorno determinare i valori di $d\alpha$ e di $d\delta$.

Problema II. Date le differenze di ascensione retta e di declinazione fra la macchia ed il centro del Sole, trovare la differenza di longitudine, e la latitudine della macchia.

118. Tali differenze non eccedendo giammai il semidiametro del Sole, e quindi essendo comprese entro i limiti $\pm 16'$, si potranno sempre trascurare le loro potestà superiori alla prima, e perciò potranno esse riguardarsi come veri differenziali. Supponendo pertanto che α e δ siano l'*AR* e declinazione del Sole; L e λ la sua longitudine e la sua latitudine (la quale è sempre $= 0$); $L + dL$, $\lambda + d\lambda$ siano la cercata longitudine e latitudine della macchia, avremo dalle equazioni (E) del § 66 (ponendovi $\lambda = 0$)

$$(1)\quad d\,L = \cos S \cos \delta\, d\,\alpha + \operatorname{sen} S\, d\,\delta;$$
$$(2)\quad d\,\lambda = \cos S\, d\,\delta - \cos \delta \operatorname{sen} S\, d\,\alpha;$$

essendo (§ 65) $\cos S = \frac{\cos \iota}{\cos \delta}$; $\operatorname{sen} S = \frac{\operatorname{sen} \iota \cos L}{\cos \delta}$; e quindi $\operatorname{tang} S = \operatorname{tang} \iota \cos L$.

Queste ultime tre formule daranno il valore di S, e la sua specie. Le prime due daranno i valori di dL e di $d\lambda$. Quindi sarà longitudine osservata di macchia $= L + dL$, sua latitudine $= d\lambda$. Se $d\lambda$ risulta positivo, la latitudine della macchia sarà boreale, in caso diverso essa sarà australe.

Problema III. Data la longitudine e la latitudine della macchia veduta dalla terra, trovare la sua longitudine e la sua latitudine veduta dal centro del Sole.

119. (Gli Astronomi chiamano *longitudini e latitudini geocentriche* di un corpo celeste quelle che si osservano dal centro della terra; *longitudini e latitudini eliocentriche* quelle che si osserverebbero dal centro del Sole).

(*Fig.* 25) Rappresenti il piano della tavola quello della ecclittica, in cui ad un dato tempo sia T il centro della terra; S il centro del Sole. $T\Upsilon'$ la linea degli equinozj, da cui si numerano nella terra le longitudini geocentriche, ed $S\Upsilon$ la sua paralella condotta per il centro del Sole, da cui si numerano le longitudini eliocentriche, che si dovranno far aumentare sempre come le geocentriche da zero fino a 360° procedendo da occidente verso oriente. Sia M un punto del globo solare, in cui osservasi una macchia. Dal punto M si abbassi una perpendicolare Mm sul piano dell' ecclittica, e si conducano le linee MT, MS, mT, mS. Pongasi

$\Upsilon' TS =$ longitudine di Sole . . . . $= l$

$\Upsilon' Tm =$ longitudine geocentrica di macchia . $= l + dl$

$MTm =$ latitudine geocentrica di macchia . $= d\lambda$

l'angolo ottuso $\Upsilon ST =$ longit. eliocent. di terra . $= 180° + l$

$\Upsilon Sm =$ longit. eliocent. di macchia $= 180 + l - p$

di modo che l'angolo $TSm = p$

L'angolo $MSm =$ latit. eliocentrica di macchia $= q$; R'' sia il numero dei secondi contenuti nel raggio delle tavole, che supponesi $= 1$.

Sia inoltre il semidiametro del Sole $SM = r$, ed in secondi $= r''$, la distanza ST della terra dal Sole $= R$; sarà $r'' = \frac{rR''}{R}$.

Si avrà per calcolare l'angolo MTS l'equazione $\cos MTS = \cos MTm \cos mTS$, e ponendo $MTS = z$, essa sarà $\cos z = \cos d\lambda \cos dl$. In fatti immaginandosi col centro T, e raggio 1 descritta una sfera, i tre piani mTM, mTS, MTS tracciano in quella un triangolo sferico rettangolo, di cui z è l'ipotenusa; dl, $d\lambda$ i due lati. Ora non essendo dl, $d\lambda$ giammai maggiori di 16'

potremo svolgere i coseni in serie, e trascurando le potenze superiori alla seconda, la precedente equazione tosto si cangia nella seguente $z^2=(d\lambda)^2+(dl)^2$. Posto poi l'angolo $MS,T=S$, il triangolo TMS dà $ST:SM::\text{sen}(S+z):\text{sen}\,z$; quindi

$$\text{sen}(S+z)=R\,\frac{\text{sen}\,z}{r}=\frac{Rz}{R''r}=\frac{z}{r''};\quad \text{donde}\quad S=(S+z)-z.$$

Conosciuto l'angolo S si avrà $TM=\dfrac{R\,\text{sen}\,S}{\text{sen}(S+z)}=\dfrac{R\,r''}{z}\,\text{sen}\,S$;

$$\text{sen}\,q=\frac{Mm}{MS}=\frac{MT\,\text{sen}\,d\lambda}{MS}=\frac{\text{sen}\,S}{\text{sen}\,z}\,\text{sen}\,d\lambda=\frac{d\lambda}{z}\,\text{sen}\,S.$$

Il triangolo mTS darà poi $\text{sen}\,p=\dfrac{mT}{mS}\,\text{sen}\,mTS=\dfrac{dl\,\text{sen}\,S}{z\cos q}$.

Indi descritta una sfera col centro S e raggio 1, i tre piani MSm, mST, MST formeranno in quella un triangolo sferico rettangolo, di cui l'ipotenusa sarà S; p, q saranno i lati. Perciò avremo ancora $\cos p=\dfrac{\cos S}{\cos q}$; e quindi $\text{tang}\,p=\dfrac{dl}{z}\,\text{tang}\,S$.

Ecco pertanto le formule che ci daranno i valori di p, di q.

(1) $z=\sqrt{[(dl)^2+(d\lambda)^2]}$, e ponendo $\dfrac{d\lambda}{dl}=\text{tang}\,\varphi$, avremo $z=\dfrac{dl}{\cos\varphi}=\dfrac{d\lambda}{\text{sen}\,\varphi}$

(2) $\text{sen}(S+z)=\dfrac{z}{r''}$; donde $S=(S+z)-z$

(3) $\text{sen}\,q=\dfrac{d\lambda}{z}\,\text{sen}\,S=\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,S$

(4) $\text{sen}\,p=\dfrac{\cos\varphi\,\text{sen}\,S}{\cos q}$; $\cos p=\dfrac{\cos S}{\cos q}$; $\text{tang}\,p=\cos\varphi\,\text{tang}\,S$.

Trovato poi l'angolo p, sarà la longitudine eliocentrica della macchia $=180+l-p$, e la sua latitudine $=q$.

Si vede facilmente, che se dl fosse stato negativo la longitudine eliocentrica sarebbe stata $=180°+l+p$.

Del resto è facile vedere, che un piccolo errore nel valore di z ne porta uno considerabile nel valore di S, da cui dipendono quelli di p e di q. Se si rifletta alla difficoltà di bene osservare i valori di dl e di $d\lambda$ non farà meraviglia il poco accordo che si trova nei risultamenti da sì fatte osservazioni dipendenti.

Problema IV. Date tre longitudini e tre latitudini eliocentriche di una stessa macchia coi tempi corrispondenti, si domanda la posizione dell'equatore solare rapporto all'ecclittica, ed il tempo della rotazione del Sole.

120. (*Fig.* 26) Immaginiamoci l'osservatore nel centro del Sole; e

sia E la posizione del polo boreale dell'ecclittica, P la posizione del polo boreale dell'equatore solare, attorno a cui tutti i punti del globo solare sembrano ravvolgersi in tanti circoli paralelli. Siano C, A, T le tre posizioni della macchia corrispondenti alle tre date longitudini eliocentriche. Saranno CE, AE, TE i complementi delle tre date latitudini eliocentriche; gli angoli CEA, AET, CET saranno le differenze delle longitudini date fra la prima e seconda, seconda e terza, prima e terza osservazione; EP sarà la inclinazione dell'equatore solare rapporto all'ecclittica, e CEP darà la posizione del polo rapporto alla prima osservazione della macchia. Si ponga pertanto $CP = PA = PT = h$; $PE = \varphi$; $CE = \delta''$; $AE = \delta'$; $ET = \delta$. L'angolo incognito $PET = \lambda$; $AET = \theta$; $CET = \theta'$.

I tre triangoli PET, PEA, PEC daranno evidentemente le tre seguenti equazioni

$$\cos h = \cos \varphi \cos \delta + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta \cos \lambda$$
$$\cos h = \cos \varphi \cos \delta' + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta' \cos (\lambda - \theta)$$
$$\cos h = \cos \varphi \cos \delta'' + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta'' \cos (\lambda - \theta')$$

nelle quali h, φ, λ sono le incognite.

Queste equazioni sono quelle stesse che abbiamo sopra risolute nel § 58 esponendo il terzo metodo di determinare l'altezza del polo con tre osservazioni di stelle che pervengono ad una medesima altezza. Quindi con la stessa analisi si potranno trovare i valori di φ, di λ e di h.

Sarà φ l'inclinazione dell'equatore solare all'ecclittica; se indichiamo per l'' la longitudine eliocentrica nella terza osservazione, la longitudine del polo P sarà $= l'' - \lambda$, e perciò l'equatore solare taglierà l'ecclittica in due punti, la cui longitudine sarà $= l'' - \lambda + 90°$, $l'' - \lambda + 270°$. La quantità h sarà la distanza della macchia dal polo dell'equatore solare.

Per trovare poi la durata della rotazione solare nel triangolo CET, conoscendo EC, ET, l'angolo CET, si calcoli CT; quindi nel triangolo CPT, in cui si conoscono i tre lati, si trovi l'angolo CPT. Rappresentando poi per t la differenza dei tempi fra la prima e la terza osservazione, sarà il tempo della rotazione cercata $= \frac{360° \, t}{CPT}$.

121. Un'altra soluzione di questo stesso problema è stata data dal celebre cav. Cagnoli, che dal chiarissimo Oriani fu nelle Effemeridi di Milano pel 1810 analiticamente dedotta, e confrontata con la soluzione superiore dovuta al dott. Gauss. Noi ci contenteremo di riferirne qui la dimostrazione trigonometrica dell'Autore, rimandando per ulteriori sviluppi alla citata Memoria di Oriani.

Siano AC, AT, CT gli archi di circolo massimo che congiun-

gono le tre posizioni date della macchia. Si ritengano le superiori denominazioni, ed inoltre si ponga $ETP = T$, $EAP = A$, $ECP = C$. Il triangolo TEA darà per una delle proporzioni di Nepero
$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(EA + ET) : \operatorname{sen} \frac{1}{2}(EA - ET) :: \cot \frac{1}{2}(TEA) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(ETA - EAT)$;
ora si ha $ETA - EAT = ETP + PTA - (PAT - EAP) = T + A$ a motivo di $PTA = PAT$ essendo isoscele il triangolo PTA. Quindi, osservando le denominazioni stabilite, avremo

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(T + A) = \cot \tfrac{1}{2}\theta \, \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\delta + \delta')}.$$ Del pari si avrà

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(T + C) = \cot \tfrac{1}{2}\theta' \, \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\delta'' - \delta)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\delta + \delta'')}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A + C) = \cot \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) \, \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\delta'' - \delta')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\delta' + \delta'')}.$$

Di qui sarà poi facile di conoscere i valori di T, A, C. Così, a cagion d'esempio, sarà $T = \frac{1}{2}(T + A) + \frac{1}{2}(T + C) - \frac{1}{2}(A + C)$. Si potranno anche formare le mezze differenze di T, A, C, essendo per esempio $\frac{1}{2}(T - A) = \frac{1}{2}(T + C) - \frac{1}{2}(A + C)$.

Formati questi valori è facile dedurne le incognite in questione. I due triangoli PET, PEA danno

$\operatorname{sen} PET : \operatorname{sen} PT :: \operatorname{sen} T : \operatorname{sen} PE$
$\operatorname{sen} PEA : \operatorname{sen} (PA = PT) :: \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} PE$. Quindi
$\operatorname{sen} \lambda : \operatorname{sen} (\lambda - \theta) :: \operatorname{sen} T : \operatorname{sen} A$;

donde componendo e dividendo si deduce
$\operatorname{sen} \lambda + \operatorname{sen} (\lambda - \theta) : \operatorname{sen} \lambda - \operatorname{sen} (\lambda - \theta) :: \operatorname{sen} T + \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} T - \operatorname{sen} A$
ovvero $\operatorname{tang} (\lambda - \frac{1}{2}\theta) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta :: \operatorname{tang} \frac{1}{2}(T + A) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(T - A)$.
Quindi $\operatorname{tang} (\lambda - \frac{1}{2}\theta) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \, \dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(T + A)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(T - A)}$.

Conosciuto λ si avrà, quanto occorre per determinare l'inclinazione PE dell'equatore all'ecclittica, l'angolo TPC, che somministra la durata della rivoluzione solare.

L'angolo λ tolto dalla longitudine della macchia in T, somministra la longitudine del polo P, a cui aggiungendo 90° e 270° si avranno le longitudini dei punti, nei quali l'equatore solare incontra l'ecclittica. Queste intersezioni sono dagli Astronomi dette *nodi*. Così chiamando l'', come sopra, la longitudine della macchia in T, le longitudini dei due nodi saranno $l'' - \lambda + 90°$, $l'' - \lambda + 270°$. Il primo chiamasi *nodo ascendente*, il secondo *nodo discendente*. Chi desiderasse su questo metodo ulteriori sviluppi, e la sua applicazione ad un esempio numerico, legga la Memoria del signor Cagnoli inserita nel tomo X *des Savans etrangers*.

122. Determinano gli Astronomi la posizione di una macchia ve-

duta dal centro del Sole rapporto all' equatore solare nel modo seguente. (*Fig.* 27) Rappresenti $POMQ$ un circolo massimo della sfera celeste, il cui centro supponesi ora nel centro del Sole, che passi contemporaneamente per il polo O dell' ecclittica, e per il polo P dell' equatore solare. Rappresenti EAC l' ecclittica, ed Υ l' equinozio, da cni si contano le longitudini; sia poi $M\Omega Q$ l' equatore solare, ed Ω il suo nodo ascendente, cosicchè $\Omega\Upsilon$ sia la longitudine del nodo ascendente superiormente determinata. Prendono in seguito l' arco $\Omega\Upsilon' = \Omega\Upsilon$, e dal punto Υ' contano nell' equatore gli archi. Così se S rappresenta la posizione di nna macchia, condotti pei poli O, P gli archi OSA, PSF la sua posizione è determinata rapporto all' ecclittica per l' arco $A\Upsilon$ = longitudine eliocentrica della macchia, e per l' arco AS = sua latitud. eliocentrica. Rapporto all' equatore poi è essa determinata per gli archi $F\Upsilon'$, SF. Il primo appellasi *ascensione retta eliocentrica* della macchia, ed il secondo è la sua *declinazione*.

Descrivendo la macchia in virtù della rotazione solare nn paralello all' equatore, la sua declinazione resta invariabile, ma la sua AR aumenta sempre proporzionalmente al tempo.

123. Dietro le cose precedenti è facile determinare la posizione di una macchia rapporto all' equatore solare. Pongasi in fatti

la sua longitudine eliocentrica . . $\Upsilon A = l$
la sua latitudine . . . . $AS = \lambda$
la longitudine del nodo . . $\Omega\Upsilon = \Omega\Upsilon' = \Omega$
l' inclinazione dell' equatore solare $= A\Omega F = i$
l' AR eliocentrica della macchia . . $F\Upsilon' = \alpha$
la sua declinazione . . . . $FS = \delta$

Osservando che il punto Ω è polo del circolo POM facilmente si vedrà, che nel triangolo POS abbiamo

$$POS = l - \Omega + 90,\ OS = 90 - \lambda,\ OPS = 90 - (\alpha - \Omega),$$
$$PS = 90 - \delta,\ PO = i;$$

quindi dal triangolo OPS avremo per la Trigonometria le seguenti equazioni

$$\text{sen}\,\delta = \cos i\ \text{sen}\,\lambda - \text{sen}\,i \cos\lambda\ \text{sen}\,(l - \Omega)\ .\ .\ .\ (1)$$
$$\text{tang}\,(\alpha - \Omega) = \frac{\text{tang}\,\lambda\ \text{sen}\,i + \text{sen}\,(l - \Omega)\cos i}{\cos(l - \Omega)}\ .\ .\ (2)$$

alle quali due equazioni si può aggiungere l' altra

$$\cos(\alpha - \Omega)\cos\delta = \cos(l - \Omega)\cos\lambda,$$

che servirà di riprova all' operazione.

Del resto facilmente si vede, che questi rapporti sono gli stessi di quelli che esistono fra l' AR, la declinazione, la longitudine e la latitudine degli astri cambiando l' obbliquità dell' ecclittica in i, e diminuendo le longitudini ed AR della quantità Ω.

124. Dall' equazione (1) il signor de Lambre ha ricavato nn altro metodo per determinare la posizione dell' eqnatore solare, facendo in questa ricerca concorrere un nnmero qnalnnqne di osservazioni della stessa macchia. In fatti essa può scriversi ancora sotto la forma

$$\frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos i} = \operatorname{sen} \lambda - \cos \lambda \operatorname{sen} l \operatorname{tang} i \cos \Omega + \cos \lambda \cos l \operatorname{tang} i \operatorname{sen} \Omega,$$

nella qnale le qnantità δ, i, Ω sono incognite, ma costanti da nn' osservazione all' altra; λ ed l sono qnantità date dall' osservazione. Ponendo adunque

$$\frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos i} = x\,; \quad \operatorname{tang} i \cos \Omega = y\,; \quad \operatorname{tang} i \operatorname{sen} \Omega = z\,;$$

la precedente equazione avrà la forma $x = A - By + Cz$.

Si calcoleranno i coefficienti A, B, C per ogni osservazione, ed avendo una serie di equazioni di primo grado con le tre incognite x, y, z si combineranno fra loro nel modo più vantaggioso per ottenerne i valori. Si potranno per es. risolvere col metodo dei minimi qnadrati, ed avremo le incognite x, y, z affette il meno che sia possibile dagli errori delle osservazioni.

Dai valori di y e di z si dedurranno poi i valori di i e di Ω mediante le eqnazioni $\operatorname{tang} \Omega = \frac{z}{y}$; $\operatorname{tang} i = \frac{y}{\cos \Omega} = \frac{z}{\operatorname{sen} \Omega}$.

Determinati i valori di i e di Ω si calcoleranno le *AR* eliocentriche della macchia per ogni osservazione, e qnindi dalle differenze dell'*AR*, e dei tempi corrispondenti si dedurrà con nna semplice proporzione la dnrata della rotazione periodica. Combinando a dne a dne in tal guisa le osservazioni lontane, si dedurrà la rotazione periodica da ogni pajo di osservazioni, ed il medio di questi risnltamenti darà la rotazione solare tanto più probabilmente vera, qnanto maggior nnmero di osservazioni si saranno impiegate.

Il citato astronomo de Lambre (*Abr. d'Astronomie, Paris* 1813) ha calcolato con qnesto metodo undici osservazioni riferite dal sig. la Lande nelle Memorie di Parigi pel 1776 pag. 464, ed ha ottenuto i segnenti risnltamenti nn poco diversi da quelli degli altri Astronomi, ma più conformi alla verità, perchè dedotti da un maggior nnmero di osservazioni.

Longitndine del nodo $\Omega = 2^s\, 20^\circ\, 45'\, 7''$
inclinazione . . . $i = 7\ \ 19\ \ 9$
rotazione periodica . . $= 25^g{,}01154$.

Conoscinta la durata della rotazione periodica del Sole, si avrà la quantità della sna rotazione dinrna $= \frac{360^\circ}{25{,}01154} = 14{,}39335$. Non convien poi credere che una macchia solare ritorni rapporto alla terra

nella stessa posizione entro l'intervallo di giorni 25,01154, giacchè mentre il Sole in un giorno ravvolgesi da occidente verso oriente per un arco di $14^{s},39335$, e quindi la macchia di altrettanto sembra allontanarsi dall'equinozio; il Sole stesso in virtù del suo moto annuo nella stessa direzione dall'equinozio allontanasi di $0°\,59'\,8'',33 = 0°,98565$. Così il moto relativo della macchia rapporto alla terra, ossia l'arco, di cui sembra allontanarsi in un giorno dal centro del Sole sarà la differenza di questi due, cioè $= 13°,40770$. Si compirà pertanto la durata della rivoluzione della macchia rapporto alla terra in un numero di giorni espresso da $\frac{360°}{13°,4077} = 26^{s},85024$.

Questo intervallo di tempo, che riconduce la macchia alle stesse posizioni rapporto alla terra, chiamasi dagli Astronomi *rivoluzione sinodica*. Del resto dobbiamo osservare con lo stesso signor de Lambre (*Astronomie tom. II. Paris* 1814), che questi risultamenti possono ancora essere sottoposti a notabili errori per la grande influenza che hanno nelle longitudini e latitudini eliocentriche delle macchie gli errori delle osservazioni geocentriche, errori inevitabili per la irregolarità e variabilità della loro figura.

125. Egli è ora facile di vedere qual sarà la linea apparente percorsa da una macchia nel disco del Sole in qualunque tempo dell'anno. Supponiamo in fatti (*Fig.* 27) che il Sole veduto dalla terra nell'ecclittica apparisca in ☼ avendo una longitudine ☼♈ = ☉. Conviene immaginarsi la terra situata ad una distanza grandissima sopra una perpendicolare al piano della tavola condotta per ☼, ed in allora il disco apparente del Sole sarà contenuto nel piano stesso della tavola. Se per ☼ si conduce l'arco ☼H perpendicolare all'equatore solare MQ, sarà ☼H l'elevazione apparente dell'equatore solare sopra l'ecclittica, come sarebbe veduto dalla terra nella parte ascendente, ossia nell'emisfero a noi opposto; e quindi il suo complemento 90 — ☼H sarà l'inclinazione dell'equatore solare al disco apparente del Sole. Ora un circolo di raggio R progettato sopra un piano, a cui è inclinato di un angolo $= n$, vi apparisce un'ellisse, il cui asse maggiore è $= 2R$, e l'asse minore $= 2R \cos n$. Pertanto l'equatore solare percorso da una macchia sarà veduto come un'ellisse, il cui asse maggiore è $= 2R$, ed il minore $= 2R\cos(90 -$ ☼$H) = 2R \operatorname{sen}$ ☼H $= 2R \operatorname{sen} i \operatorname{sen}($☼$ - \Omega)$, rappresentando R il raggio apparente del disco solare.

Un'altra macchia qualunque che circolasse ad una distanza δ dall'equatore, descrive evidentemente un circolo, il cui raggio è $= R\cos\delta$; ed esso in conseguenza dalla terra apparirà un'ellisse, di cui l'asse maggiore sia $= 2R\cos\delta$, ed il minore $= 2R\cos\delta \operatorname{sen} i \operatorname{sen}($☼$ - \Omega)$.

Siccome poi la direzione dell' asse minore dell' equatore solare e dei suoi paralelli è compresa nel piano del circolo $\odot H$ perpendicolare all' equatore solare, così l' asse minore di questa ellissi farà colla direzione dell' ecclittica un angolo $H \odot \Omega$, che porremo $= P$, e che viene determinato dall' equazione $\cot P = \cos(\odot - \Omega) \operatorname{tang} i$. Fingendo l' arco $H\odot$ sempre diretto al polo boreale, dovrà l' angolo P determinarsi fra $0° - 180°$, con che sarà dietro le regole dei segni tolta ogni indecisione.

Dietro ciò, ecco come costruirassi la linea percorsa da una macchia qualunque di declinazione δ, quando la longitudine del Sole sia $= \odot$ (*Fig.* 28).

Con un raggio $\odot E = R$ descrivasi un circolo per rappresentare il disco apparente del Sole, in cui si conduca la linea EC per rappresentare l' ecclittica; $P \odot S$ perpendicolare ad EC sarà l' asse dell' ecclittica. Pongasi l' angolo $C \odot N = P$ determinato, come sopra. Conducasi MQ pel centro $\odot$ perpendicolare a $\odot N$. Prendasi quindi $\odot H = \odot H' = R \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\odot - \Omega)$, e la ellisse descritta sopra MQ come asse maggiore, e sopra HH' come asse minore rappresenterà la projezione dell' equatore solare sul piano del disco a noi visibile. Per descrivere poi un paralello di declinazione δ prendasi $MF = QF' = \delta$; sarà FF' l' asse maggiore, e preso $th = th' = R \cos\delta \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\odot - \Omega)$, hh' rappresenterà l' asse minore della projezione del paralello, la quale si potrà così facilmente costruire con le consuete regole. Di queste ellissi la parte inferiore rivolta verso il mezzodì, o verso S corrisponde alla parte discendente situata nell' emisfero a noi visibile quando $\odot H$ è positivo, e viceversa.

126. Finalmente se si desiderasse il tempo, che una macchia veduta dalla terra impiega ad attraversare tutto il disco del Sole, si potrebbe ottenere in tal guisa.

(*Fig.* 27) Sia $\odot$ il luogo del Sole, a cui sovrasta la terra in una distanza grandissima, ed il circolo EOQ ne rappresenti il disco visibile. P sia il polo dell' equatore MQ, ed una macchia in F sia per disparire avendo già descritto un paralello all' equatore in una distanza $FQ = \delta$. Corrispondendo $\odot$ al polo del disco visibile solare sarà $\odot F = 90°$; l' angolo $FP\odot$ misurerà la durata della mezza apparizione. Ora è manifesto essere per l' emisfero superiore (in cui l' equatore solare fingesi ascendente sopra l' ecclittica) $\odot P = 90° + \odot H$; quindi per l' emisfero inferiore a noi rivolto sarà $\odot P = 90 - \odot H$. Posto ciò, dal triangolo $FP\odot$ avremo

$$\cos FP\odot = \frac{\cos \odot F - \cos PF \cos P\odot}{\operatorname{sen} PF \operatorname{sen} P\odot} = -\operatorname{tang}\delta \operatorname{tang} \odot H.$$

Si calcoli pertanto l' arco $\odot H$ coll' equazione

sen ☼ H = sen i sen (☼ — ☊), quindi dalla formula precedente avrassi l'angolo FP☼. Se ora si chiama T la durata della rivoluzione sinodica, sarà la durata dell'apparizione della macchia $= \frac{T . FP ☼}{180°}$.

CAPITOLO X.

Teoria della Luna.
Fenomeni generali del moto della Luna.

127. Dopo di avere esposto con una sufficiente estensione la teoria del Sole, innalzandoci colle sole osservazioni alla cognizione delle leggi dei suoi movimenti, passiamo a fare le stesse applicazioni alla Luna, che è il corpo celeste, il quale dopo il Sole più colpisce i nostri sensi.

La sua luce è più pallida di quella del Sole, e raccolta col mezzo di fortissime lenti non desta alcun senso di calore, nè fa innalzare di alcuna percettibile quantità i termometri più sensibili.

Le sue fasi variatissime ed a tutti conosciute dimostrano 1.° che essa è un corpo opaco di figura sferica; 2.° che riceve la sua luce dal Sole; 3.° che si ravvolge intorno alla terra. Noi non dobbiamo far altro che seguirla nelle sue diverse fasi per accorgerci della verità delle esposte conseguenze.

Primieramente dal perdere gradatamente, ed acquistar la sua luce con tanta regolarità si deduce esser la Luna un corpo opaco, poichè sarebbe assurdo ed anche ridicolo il voler supporre che essa avesse la facoltà di accendersi ed estinguersi successivamente senza la minima alterazione. Non si può nemmeno dire, che abbia una parte oscura ed una parte lucida, e che ravvolgendosi per il cielo stellato intorno a noi vada successivamente mostrando e nascondendo la sua parte luminosa, poichè dalle più esatte osservazioni fatte coi migliori cannocchiali risulta, che essa presenta sempre a noi la medesima faccia. Col progresso delle fasi lunari dimostreremo qui sotto essere la Luna un corpo sferico, il quale a noi, a cagione della sua considerabile distanza, si presenta come un disco circolare. Che poi un tal corpo opaco venga illuminato dal Sole, ce lo persuade lo spander quest' astro a grandissime distanze gran copia di vivissima luce, e l'avere la Luna sempre rivolta la sua porzione illuminata verso del Sole, e ad esso opposta la parte oscura. Noi dobbiamo pertanto immaginarci, che i raggi luminosi del Sole dalla superficie lunare venendo intercettati, e verso noi riflessi ce la rendano visibile. Ciò posto, esaminiamo le sue fasi, ed il loro progresso in tutte le sue posizioni rapporto al Sole.

128. Quando la Luna si avvicina al suo novilunio, la sua fase luminosa va di più in più diminuendo, finchè sparisca del tutto. Resasi la Luna invisibile, è certo che essa nel cielo è situata molto vicino al luogo apparente del Sole, giacchè nei giorni precedenti il novilunio la posizione della Luna si andava avvicinando al luogo del Sole a proporzione della diminuzione della fase luminosa. In questo tempo la Luna ed il Sole nascono e tramontano insieme sull' orizzonte. Nei novilunj accade sovente, che la Luna intercetti a noi in tutto, o in parte la luce solare, ed in allora hanno luogo gli ecclissi del Sole, che sono o totali, o parziali, secondo che la Luna o in tutto, o in parte ci asconde il disco solare. Provano pertanto gli ecclissi solari evidentemente 1.° che la Luna nei novilunj si avvicina al Sole fino a nasconderlo agli abitatori della terra; 2.° che la Luna è un corpo opaco; 3.° che essa è situata fra la terra ed il Sole.

Due o tre giorni dopo il novilunio si vede a ricomparire con una tenuissima falce luminosa. Essa è in allora nel cielo stellato più orientale del Sole, e tramonta dopo di esso; le estremità della fase luminosa sono rivolte ad oriente in parte contraria al Sole. La fase luminosa si va nelle seguenti sere aumentando; la parte interna rivolta verso oriente ha la forma di un' ellisse, e la parte al Sole rivolta è terminata da un arco di circolo. Sette giorni circa dopo il novilunio la Luna apparisce ai nostri occhi come un mezzo circolo illuminato, terminato da un suo diametro verso oriente. Allora la Luna è sul meridiano in circa, quando il Sole tramonta ad occidente, ed è da esso distante di 90°. Dicesi che trovasi in *quadratura,* o nel *primo quarto*.

Continuando quindi la Luna ad allontanarsi verso oriente, la sua parte luminosa va aumentando; essa è sempre terminata in un arco di circolo dalla parte rivolta verso il Sole, mentre all' opposta parte è terminata da una ellisse, che rivolge al circolo la sua concavità. La fase luminosa aumenta a segno, che 14 giorni dopo il novilunio apparisce sotto la forma di un circolo intero illuminato. In allora la Luna è opposta al Sole, e nasce sull' orizzonte quando il Sole tramonta. Dicesi che in tal posizione la Luna è in opposizione al Sole, ossia che la *Luna è piena,* o in *plenilunio*. Spesso accade nei plenilunj che la Luna o in tutto, o in parte s' immerga nel cono ombroso, che la terra lascia dietro di se dall' opposta parte del Sole, ed in tutto, o in parte perda del suo splendore. Se s' immerge interamente nell' ombra, hanno luogo gli *ecclissi totali* di Luna; se poi soltanto vi s' immerge in parte, hanno luogo gli *ecclissi parziali*.

Gli ecclissi di Luna provano ancora da capo essere essa un corpo opaco, giacchè perde il suo splendore per tutto quel tempo che impiega ad attraversare il cono ombroso. Negli ecclissi di Luna si osserva costantemente che la curva, la quale contermina nel suo disco

luminoso l'ombra, è sempre un arco di circolo; donde apertamente ne risulta essere la sezione dell'ombra terrestre in quella regione un circolo, e perciò la terra stessa un globo, o almeno un corpo rotondo moltissimo alla sfera vicino; il che conferma le prime osservazioni da noi riferite intorno alla sua figura.

Nei giorni seguenti il plenilunio la parte occidentale del disco lunare principia a perdere la sua luce, si termina in ellisse, e la fase luminosa si va sempre più ristringendo, finchè sette giorni circa dopo il plenilunio apparisce di nuovo in forma di un mezzo circolo illuminato. In tal caso trovasi distante dal Sole di circa 90°, cioè verso il meridiano allorquando ad oriente sorge il Sole sull'orizzonte. Essa è allora nella sua *seconda quadratura,* o nel *secondo quarto,* detto anche *ultimo quarto.* Dopo il secondo quarto avvicinandosi sempre più al Sole, la fase luminosa essendo colle sue punte sempre ad occidente rivolta va diminuendo, finchè poi immergendosi di nuovo nei raggi solari sparisce del tutto, e ritorna di bel nuovo al novilunio dopo 29 giorni incirca che se ne era allontanata per riprincipiare collo stesso ordine le medesime apparenze.

Dietro ciò è facile vedere, che riferendo la Luna all'ecclittica, ove sempre trovasi il Sole, hanno luogo i novilunj quando la longitudine della Luna è uguale a quella del Sole; le quadrature quando la loro differenza è $= 90°$, e finalmente accadono i plenilunj quando la longitudine di Luna meno quella di Sole $= 180°$.

I novilunj ed i plenilunj sono eziandio dagli Astronomi distinti col nome di *sizigie.*

Oltre i punti da noi particolarmente nominati, e che sono da tutti volgarmente notati ed osservati, si distinguono eziandio gl'intermedj col nome di *ottanti,* ed hanno luogo allorchè la Luna è distante dalle sizigie di 45°. La sua fase luminosa è allora intermedia fra quella che ha luogo nella prossima sizigia, e nella prossima quadratura.

129. Tutte le descritte apparenze vengono a meraviglia spiegate supponendo la Luna un corpo sferico ed opaco, che si muova intorno alla terra in un circolo poco all'ecclittica inclinato, in modo che compia la sua rivoluzione in 28 o 29 giorni circa, e supponendo il Sole tanto dalla Luna lontano, che i raggi da esso condotti a ciascun punto dell'orbita lunare possano sensibilmente riguardarsi come paralelli, la quale supposizione non molto si discosta dal vero, poichè vedremo in appresso essere il Sole tanto dalla Luna distante, che i raggi da esso condotti agli estremi di un diametro dell'orbita lunare comprendono un angolo non maggiore di 0° 20′.

Ciò posto, la *figura* 29 presenta la successione delle fasi lunari. In essa T rappresenta il centro della terra, attorno alla quale muovesi la Luna nel circolo $L\,L'\,L''\,L'''$; la di lei metà al Sole S rivolta

è sempre illuminata, e di essa alla terra ne è visibile una parte più o meno grande, secondo la sua posizione rapporto alla terra stessa ed al Sole.

Quale poi sia l'ampiezza della fase luminosa veduta dalla terra nelle diverse posizioni, ce lo indicherà il seguente

Problema. Essendo data la posizione respettiva del Sole, della terra e della Luna, determinare la fase luminosa della Luna veduta dalla terra.

130. (*Fig.* 30) Sia T il centro della terra, S del Sole, L il centro della Luna, che rappresenteremo col globo di raggio Lm. Se per il centro L si conducono due piani perpendicolari ad SL e TL, le sezioni dei quali col piano della tavola siano cLn, bLm, sarà la porzione illuminata dal Sole rappresentata dall'emisfero cmn, e la porzione della Luna visibile alla terra sarà l'emisfero bnm, di cui la sola parte mn è illuminata, ed in conseguenza rappresenterà l'ampiezza della fase visibile alla terra. Ora l'ampiezza della fase luminosa è evidentemente uguale all'angolo, sotto cui è veduto l'arco mn dalla terra T, ossia è $= mTL - nTL$. Per determinare quest'angolo pongasi il raggio assoluto della Luna $Lm = r$; la distanza della Luna dalla terra $= d$, il semidiametro apparente della Luna, ossia l'angolo $mTL = \delta$. Sarà per i principj dell'ottica $\delta = \frac{r}{d}$. Ora si ha $TLn + nLS + S + T = 180°$, ovvero $TLn = 90° - (S + T)$ a motivo di $nLS = 90$. Posto ciò, è facile vedere che

$\text{tang}\, nTL = \frac{r \cos(S+T)}{d - r \operatorname{sen}(S+T)} = nTL$ pross., e quindi posta la fase luminosa $= F$, sarà $F = \frac{r}{d} - \frac{r\cos(S+T)}{d - r \operatorname{sen}(S+T)}$, ovvero

$$F = \delta\,[1 - \cos(S+T)] - \frac{\delta^2 \operatorname{sen}(S+T)\cos(S+T)}{1 - \delta \operatorname{sen}(S+T)}.$$

Il secondo termine essendo di secondo ordine rapporto a δ si può quasi sempre trascurare, perchè non oltrepassando i 17′ egli è piccolissimo, ed è tanto più permesso di trascurarlo, in quanto che le osservazioni delle fasi lunari non sono giammai suscettibili di molta precisione.

Quanto poi alla figura della fase luminosa egli è evidente che il piano perpendicolare a quello della tavola sopra mb taglia il globo lunare lungo un circolo, il quale per essere normale al raggio TL, all'osservatore T apparisce un circolo, la di cui metà è luminosa, e la sua circonferenza sarà il confine esterno dell'emisfero lunare visibile alla terra. L'altro circolo, eretto sopra cLn normale al piano della tavola, è veduto dalla terra sotto un'inclinazione TLn, ed è riferito

al piano del circolo $b\,L\,m$; quindi vi apparirà come un'ellisse, di cui l'asse minore sarà $= L\,n \operatorname{sen} T\,L\,n = \delta \cos(S + T)$ ponendo come sopra il semidiametro della Luna $= \delta$. Quindi la fase luminosa sarà contornata esternamente da un semicircolo, ed internamente da una mezza ellisse, il cui semiasse maggiore $= \delta$, il semiasse minore $= \delta \cos(S + T)$.

131. *Scolio*. Si può senza commettere errore sensibile in questo argomento trascurare l'angolo S, il quale, come sopra abbiamo avvertito, non supera 0° 10′, come anche si può supporre che la Luna si muova nel piano dell'ecclittica, non allontanandosene essa più di 5 o 6 gradi. In allora sarà T uguale alla longitudine della Luna, meno la longitudine del Sole, alla quale differenza danno gli Astronomi il nome di *elongazione* della Luna dal Sole. Posta pertanto questa elongazione $= e$, sarà sensibilmente la fase luminosa nella sua massima ampiezza $= \delta(1 - \cos e) = \delta \operatorname{sen vers} e$; quindi l'ampiezza delle fasi lunari cresce in ragione dei seni versi delle elongazioni, lo che essendo confermato dall'osservazione comprova l'ipotesi della sfericità della Luna, da cui siamo partiti. La curva interna della fase luminosa sarà in questa supposizione medesima una ellisse, di cui l'asse maggiore è il diametro apparente $2\,\delta$ della Luna, ed il minore $= 2\,\delta \cos e$.

Alcune osservazioni sulla costituzione fisica del globo lunare.

132. Osservata la Luna con forti cannocchiali nel plenilunio si presenta come un disco circolare illuminato, ma tutte le sue parti non sono dotate di ugual grado d'illuminazione. In alcune posizioni rimarcansi dei punti di una luce vivissima, dai quali sgorgano tratti egualmente lucidi, che all'intorno si estendono quasi luminosi torrenti, lasciando intercetti degli spazj più opachi. Vedonsi in altri luoghi macchie più oscure della media luce lunare, e rassomigliano a mari o stagni, che sono talvolta attraversat' da qualche striscia più luminosa. Una tale varietà di accidenti rimarchevoli per forma e posizione sulla superficie lunare, unita all'insieme della luce pallida, che rischiara e non abbaglia la vista, terminata, o dirò così concentrata dentro un perfetto circolo luminoso, desta senza dubbio a chi la rimira per la prima volta un alto senso di meraviglia.

Il filosofo, che tende ad indagare la causa di queste circostanze, ha bisogno di seguirle in tutte le loro posizioni per poter raccogliere dal complesso dei fatti le cause, dalle quali dipendono.

Nel tempo degli ecclissi lunari, quando la Luna è totalmente immersa nel cono ombroso, che lascia dietro di se la terra, sparisce tanta varietà, più non si scorge traccia di luce, o se pur si scorge, è tenuissima, e di colore rossastro.

Dopo il novilunio, e verso le quadrature la fase della Luna non è terminata in una perfetta ellissi, o in una linea retta, come sembrerebbe che dovesse accadere se la Luna fosse perfettamente sferica; ma si notano verso il confine che separa la parte illuminata dalla parte oscura delle grandi ineguaglianze simili ad una specie di dentatura, massime dalla parte inferiore del globo lunare. Là vedi una punta luminosa alquanto discosta dal confine medio della fase lucida; più in alto scorgi quasi un anello illuminato, che racchiude uno spazio oscuro; nella parte illuminata vedi quelle stesse ombre, che osservasti nel plenilunio, ma alquanto più dense, e determinate.

Queste apparenze provano evidentemente, che la superficie lunare non è composta di materie tutte egualmente atte a riflettere la luce, e che la sua figura non è perfettamente sferica; ma invece esistono nella superficie della Luna grandissime prominenze, simili alle montagne della nostra terra, le quali la rendono scabrosa e disuguale.

Le diverse gradazioni di luce osservate nel plenilunio, vale a dire quando il Sole rapporto a noi illumina di fronte la Luna, provano ad evidenza l'esistenza di materie più o meno atte a riflettere a noi la luce solare. Così quei punti luminosissimi da noi osservati potrebbero rassomigliare a scogli ed aride montagne, che quasi tutta riflettono la luce solare. Per lo contrario quelle macchie oscure, o poco illuminate, quantunque in faccia abbiano il Sole, gran parte assorbono dei suoi raggi, i più forti solo ne sono verso noi rimandati, ed in ciò assomigliar si potrebbero alle nostre paludi, stagni, mari ec.

Io dico inoltre, che quelle dentature e punti lucidi di vario genere, e di varia forma che scorgonsi verso i confini della fase luminosa nelle vicinanze delle quadrature provano nella superficie lunare l'esistenza di alte montagne, e tanto più elevate quanto più sono dal medio confine della fase discoste, e situate addentro la parte oscura. Per ben comprenderlo immaginiamoci il Sole non per anco sorto sul nostro orizzonte, ma ad esso molto vicino. Avanti d'illuminare le nostre basse pianure egli illumina le cime delle alte montagne che ci stanno di fronte, e quindi successivamente avvicinandosi al nostro orizzonte le montagne si ricuoprono di luce, finchè anche le punte dei più alti campanili cominciano ad indorarsi, rimanendo oscure tuttavia le pianure e i bassi fondi, che alla media superficie terrestre sono di livello. In questo stato di cose sia il nostro occhio improvvisamente trasportato al zenit, e da quella sublime altezza riguardi la terra nostra, la quale da per se opaca ed oscura non sarà visibile, se non in quanto riflette i raggi solari. Egli è evidente, che vedrà della nostra terra quella metà che è al di sopra dell'orizzonte razionale, della qual metà la porzione situata all'oriente sarà dal Sole illuminata e visibile, e l'altra oscura ed invisibile. Ma verso il confine della parte

illuminata, egli scorgere non potrà le nostre pianure non ancora illuminate, mentre dal seno oscuro di esse vedrà quai luminosi tratti sorgere le cime delle nostre alte montagne, le quali saranno tanto più dal medio confine della luce discoste, quanto più saranno esse elevate. Tale è appunto la situazione della Luna in quadratura rapporto al Sole, e rapporto a noi, e per conseguenza le stesse apparenze provano alla sua superficie l'esistenza di alte montagne.

Di qui ancora è facile concepire, come col mezzo delle osservazioni siasi potuto determinare la loro altezza, e come siasi pervenuto a dimostrare essere la superficie lunare molto più scabrosa, ed intralciata di montagne assai più elevate di quelle della nostra terra, intorno a che meritano di essere lette fra i moderni le osservazioni del celebre Schroeter pubblicate nell'insigne sua opera intitolata *Selenotopografische fragmente etc. Gottingen* 1791 e 1802.

133. Una rassomiglianza così decisa fra la superficie lunare e la superficie terrestre ha fatto insorgere fra i filosofi la questione se la Luna sia abitata. A noi mancano dati sicuri di osservazione per poterla decidere, giacchè i nostri deboli sensi ajutati anche dai più potenti istromenti ottici non son valevoli a distinguere in quel corpo celeste creature semoventi dotate di vita. Certo che non ripugna alla divina onnipotenza una tale ipotesi. Sembra anzi consentaneo alla nostra ragione l'aumentare il numero degli enti, che da per tutto celebrino le lodi del Creatore, come sembra ripugnante, e troppo dall'umano orgoglio esaltata l'opinione, che tutti i corpi, i quali in sì prodigiose distanze ci girano intorno siano fatti unicamente per noi. Comunque ne sia di tali filosofici divisamenti, noi possiamo con sicurezza asserire non poter in quel globo aver vita e moto creature a noi simili. Egli è in fatti provato da varie osservazioni astronomiche non esser la Luna circondata da un'atmosfera alla nostra simile, o almeno averne una tenuissima; ed in conseguenza resta così provato non poter alla superficie lunare vivere esseri animati della nostra costituzione. E per non dover più tornare su questa materia, non sarà inutile indicare come col mezzo delle osservazioni astronomiche pervenire si possa a riconoscere la non esistenza, o almeno la somma tenuità dell'atmosfera lunare.

134. Egli è noto dalla fisica che un raggio di luce passando dal vuoto in un'atmosfera di una determinata densità piega il suo cammino avvicinandosi alla perpendicolare condotta al punto d'ingresso, e nel ripassare da questa atmosfera nel vuoto si allontana dalla perpendicolare condotta al punto d'egresso. Agli angoli compresi fra il raggio deviato e la primitiva sua direzione prolungata dassi il nome di *rifrazione*. Ciò posto, pongasi la Luna circondata da un'atmosfera qualunque, e vediamo quali conseguenze risultare ne dovrebbero.

(*Fig.* 31) Rappresenti L il centro della Luna HOB, la quale sia circondata da un'atmosfera Mm'. Sia SBC un raggio luminoso, che senza rifrazione raderebbe l'estremo lembo B della Luna medesima. Entrando in M nell'atmosfera lunare si avvicinerà alla perpendicolare condotta alla superficie dell'atmosfera, ed in conseguenza al centro L, prendendo la direzione Mm'. Sortendo dall'atmosfera in m', si allontanerà dalla perpendicolare Lm', ed invece di continuare per la direzione $Mm'm''$, prenderà la direzione $m'T$ inclinata ad $m'm''$ quanto la $s'M$ lo era alla SM. Quindi quell'astro che senza la rifrazione apparir doveva nel lembo lunare in S, ne sarà tuttora discosto nel cielo stellato di un arco SS'' uguale alla doppia rifrazione orizzontale della Luna. Quando pertanto un astro veduto dalla superficie terrestre apparirà sul lembo lunare, sarà realmente più vicino al centro di una quantità uguale alla doppia rifrazione dovuta all'atmosfera lunare, che porremo $= 2r$.

Posto ciò, muovasi la Luna da occidente in oriente verso una stella fissa, e la occulti, e supponiamo che col suo moto proprio essa impieghi un tempo 2τ a percorrere nel cielo stellato lo spazio $2r$. Da quanto abbiamo detto è evidente, che se senza l'atmosfera la Luna occultasse l'astro al tempo t, supposta l'atmosfera, essa lo occulterà al tempo $t + 2\tau$. Al momento in cui l'astro ricomparisce apparentemente dall'altra parte, egli sarà effettivamente più vicino al centro della quantità $2r$. Se pertanto senza la rifrazione egli fosse per ricomparire al tempo t', posta alla Luna un'atmosfera ricomparirà al tempo $t' - 2\tau$; e perciò la durata totale dell'occultazione, che senza la rifrazione sarebbe $t' - t$, posta la rifrazione diverrà $t' - t - 4\tau$.

Da un'altra parte il raggio lunare per la presenza dell'atmosfera apparirà maggiore del vero di r, e quindi l'apparente diametro supererà il diametro vero di $2r$; laonde la durata dell'occultazione dedotta dal moto vero della Luna, conosciuto dalle tavole e dal diametro apparente sarà $t' - t - 2\tau$. Se pertanto questa durata dell'occultazione calcolata uguaglia la osservata $t' - t - 4\tau$, sarà un indizio che la quantità τ è nulla; e se non sono uguali, dal loro confronto si otterrà il tempo τ, che la Luna impiega col suo moto proprio a percorrere un arco r uguale alla rifrazione della sua atmosfera, e quindi dal moto cognito della Luna otterrassi eziandio lo stesso angolo r.

135. Un altro argomento fortissimo in favore dell'atmosfera lunare si deduce dai fenomeni che si presentano negli ecclissi totali del Sole e negli ecclissi anulari. Si è osservato nella massima oscurazione la Luna circondata da una corona lucida, e talvolta ancora si sono veduti tratti di luce di vario colore scorrere all'intorno della Luna medesima, quando interamente mancò la luce solare, come ciò accadè nelle ecclissi totali del Sole del 22 Aprile 1715 vecchio stile, e del

24 Giugno 1778, ambedue riferite nelle transazioni filosofiche negli anni 1715 – 1779. Un altro fenomeno non meno singolare è stato osservato a Berlino dal celebre Eulero nell' ecclisse anulare, che ebbe luogo il 25 Luglio 1748, il quale ha dato origine ad una interessantissima Memoria dello stesso autore negli Atti dell' Accademia reale di Berlino per lo stesso anno. Ecco il fenomeno dall' Eulero osservato.

Erasi preparato in una camera oscura a mezzogiorno un foro nella finestra, per cui ricever potesse i raggi del Sole, ed avendo applicato a questo foro un tubo astronomico di 9 piedi faceva cadere l' immagine del Sole prodotta dal tubo sopra un foglio di carta bianca, la quale era fissata in modo che riuscisse perpendicolare all' asse del tubo. Dall' oculare di esso tubo allontanò egli la carta, finattantochè l' immagine apparente del disco solare cuoprisse esattamente un circolo pria disegnatovi in modo che l' asse del tubo prolungato coincidesse col centro di esso. Questo apparato era montato in modo da seguire il moto diurno del Sole. Quando la Luna ebbe nascosto gran parte del disco solare, gli angoli della porzione illuminata del Sole divenendo molto acuti, i loro vertici sortivano dal circolo disegnato nella carta, mentre il bordo illuminato del Sole da essi remoto vi era esattamente compreso. Allorchè i vertici si furono riuniti, ed apparve intorno al globo opaco della Luna l' anello luminoso del Sole, dalla parte ove era esso più stretto, sortiva il lembo solare dal circolo, di modo che aveva ricevuto un ingrandimento molto sensibile, e mentre dietro il calcolo l' ampiezza dell' anello doveva essere di un secondo, Eulero la stimò di 26 secondi incirca. Donde evidentemente risulta, che il raggio solare, il quale doveva presso che radere il lembo lunare deviò dalla sua direzione allontanandosene notabilmente. Quindi dietro l' analisi dell' articolo precedente è forza ammettere intorno alla Luna un' atmosfera. Richiamando a calcolo rigoroso tutte le circostanze dell' ecclissi, sembrò ad Eulero di poterne dedurre un' atmosfera intorno alla Luna capace di produrre una rifrazione orizzontale di 20″, intorno a che egli avverte, che potrebbe essa risultare anche molto minore. Le osservazioni posteriori ridotte scrupolosamente a calcolo hanno ridotto la refrazione orizzontale della Luna ad una quantità ben minore, e non viene essa generalmente riputata maggiore di 2″,5. Essendo pertanto nella nostra terra la rifrazione orizzontale di circa 33′, ossia 1980″, la densità dell' atmosfera lunare sarà $\frac{1}{792}$ di quella della nostra.

Una tenuità così prodigiosa, e l' inalterabilità dei colori osservata nelle occultazioni delle stelle fisse, e dei pianeti ha indotto molti Astronomi di somma riputazione a revocare in dubbio l' esistenza dell' atmosfera lunare, intorno a che merita di essere letta la Memoria del cel. sig. ab. Cesaris nelle Effemeridi di Milano pel 1790 sui vulcani

lunari. Per altro dopo le osservazioni copiose ed esatte del sig. Schroeter (il quale con forti telescopj ha eziandio scoperta qualche traccia di crepuscolo alla superficie lunare, determinando quindi l'altezza dell'atmosfera all'incirca di 300 tese) non sembra potersi sparger più dubbio intorno alla sua esistenza.

136. La somma disuguaglianza che si osserva alla superficie lunare, l'immenso numero di crateri e monti scopertivi ha fatto sospettare nella Luna l'esistenza di vulcani simili a quelli che trovansi nella terra, e questa congettura viene molto avvalorata dalle osservazioni di alcuni tratti di luce osservati talvolta nella parte oscura della Luna, che formatisi per qualche tratto, sparirono in seguito. Quelli che rigettano l'atmosfera lunare, rigettano eziandio l'esistenza dei vulcani lunari, non essendovi accensione ove manca atmosfera, per lo meno secondo le leggi fisiche che osservansi sulla terra. Sembra poi al sig. Schroeter di potere eziandio in modo inconcusso stabilire l'esistenza dei vulcani dietro le sue osservazioni, e crede che molti crateri ardano anche attualmente producendo nella Luna dei gran cambiamenti. Che anzi non mancarono filosofi, i quali spiegar volessero le pioggie di sassi che in diversi luoghi d'Italia, di Francia e di Germania sonosi osservate, colla eruzione di vulcani lunari, riguardandoli come corpi dal seno lunare con gran forza d'impulso scagliati verso la terra, e quindi per la sempre crescente attrazione terrestre condotti fino a noi. Lasciando da parte queste fisiche congetture, passiamo alla spiegazione di alcune altre particolarità che si osservano alla superficie lunare.

137. Dopo il novilunio, allorquando la fase luminosa è molto piccola, si è osservato che la Luna mantiene una luce debolissima appellata *luce cinerina*, od anche *luce secondaria*, che la rende visibile interamente ad occhio nudo, e nelle ecclissi lunari, quando la Luna è immersa nell'ombra terrestre resta tuttavia visibile per una luce rossastra molto debole.

La luce cinerina va in intensità diminuendo fino alla quadratura, alla qual epoca sparisce in faccia alla luce più viva della Luna. La causa di questa luce secondaria deve ripetersi dai raggi solari, che dalla terra vengono riflessi alla Luna, e da essa nuovamente a noi rimandati. Nel novilunio, l'emisfero terrestre alla Luna rivolto è per intero illuminato dal Sole, e perciò in gran copia rimanda verso la Luna i raggi solari, nella cui oscura superficie spandono un leggero chiarore a quello simile che la Luna in plenilunio produce sulla nostra terra, e questi per nuova riflessione tornando alla terra rendono a noi l'intero disco lunare visibile.

Che poi verso le quadrature tal luce sparisca, ciò si deve ripetere in parte dalla minor copia di raggi dalla terra alla Luna rimandati, e più ancora dallo splendore troppo vivo della fase lunare, il quale estin-

gue, o dirò così cancella nella nostra mente la sensazione di una luce più debole.

La luce rossastra, che rende la Luna visibile nel tempo della sua oscurazione durante gli ecclissi è dovuta invece ai raggi solari rifratti dall' atmosfera terrestre, ed avvicinati all' asse del cono ombroso, in virtù dei quali esso è sparso di una gran quantità di raggi luminosi, che incontrandosi nella Luna vengono di nuovo riflessi ed a noi ricondotti. Il color rosso si spiega dalla diversa rifrangibilità dei raggi luminosi, in virtù della quale solo i più forti (vale a dire i rossi) fino a noi ritornano, gli altri rimanendo per l' atmosfera e per lo spazio.

Da questa opinione comunemente ricevuta dai Fisici e dagli Astronomi dissente il sig. Regnér professore d'Astronomia in Upsal, il quale deduce la spiegazione di questo fenomeno da una sua particolare teorica sulla propagazione della luce. Egli accorda alle molecole luminose, che suppone con Newton emanate dal Sole, una minima massa, e supponendole così dotate di elasticità, spiega colla attrazione dei corpi celesti sulle molecole luminose i fenomeni della visione. Vuole pertanto il sig. Regnér, che intorno a ciascun corpo, come la terra, la Luna, i pianeti si aduni una copia considerabile di molecole luminose, formando una specie di corona simile a quella che nelle ecclissi totali di Sole si è osservato intorno alla Luna. Esistendo così intorno alla terra una copia considerabile di luce, una porzione ne è attratta dalla Luna, e quindi alla terra ritornando per riflessione unita all' attrazione terrestre a noi rende la Luna visibile eziandio quando trovasi immersa nel cono ombroso della terra (Vedasi *Monatl. Corresp. von Zach* parte VI pag. 360).

138. Terminerò queste fisiche osservazioni sulla Luna coll' addurre la ragione di un fenomeno da tutti osservato, perchè cioè il suo diametro apparente all' orizzonte apparisca più grande di quello che ha in una certa altezza sopra l' orizzonte, quando per lo contrario è facile di convincersi dover essere egli allora più piccolo. Un tale fenomeno non è che apparente, ed una conseguenza immediata della maniera di giudicare della nostra mente. La giornaliera esperienza tuttodì ci convince, che mantenendo un oggetto lo stesso angolo ottico, noi siamo disposti a giudicarlo tanto più grande, quanto meno è illuminato, e quanto più lontano lo giudichiamo, a meno che non si parli di oggetti a noi cogniti, o di distanze mediocri, nelle quali il nostro giudizio è regolato dal tatto. Così stando alla finestra in una tranquilla notte di estate ci sembra veder volare per aria grandi uccelli, e tosto che ne udiamo il ronzio, colla vicinanza sparisce il falso giudizio della grandezza loro, e più non appariscono che moscherini. Similmente accadendoci in fosca notte di vedere contro il basso cielo, o qualunque altro remoto fondo un albero, un animale a noi vicini, per

la poca luce ce li figuriamo molto lontani, ed appariscono quindi grandi, enormi fantasme; ma se arriviamo a distinguere la prossimità loro, quella spaventosa mole rimpiccolisce, e più non restano che oggetti mediocri e comuni, quali sono in realtà. Molti altri di tali falsi giudizj addurre si potrebbero per comprovare il nostro assunto; bastino questi due per tutti gli altri che in gran copia ritrovansi nei trattati d'ottica. Ora la Luna all'orizzonte apparisce meno illuminata, e la giudichiamo più lontana che allorquando è un poco sopra l'orizzonte elevata. Dunque per la falsa maniera di giudicare da noi contratta, dobbiamo reputarla maggiore.

Che la Luna all'orizzonte apparir debba meno illuminata, è evidente se si considera, che i raggi di luce attraversare dovendo maggior tratto di atmosfera, vengono a noi più indeboliti, e ciò tanto più che gli strati di essa all'orizzonte più vicini, sono eziandio sempre più densi e carichi di vapori ed esalazioni terrestri. Che poi apparir debba più lontana è pure evidente, giacchè viene riferita dietro tutti gli oggetti terrestri, e di loro assai più lontana si giudica. Ad una qualche elevazione mancano oggetti intermedj per poter col mezzo loro apprezzar la distanza, ed in conseguenza questa al nostro occhio sparisce. Così se un filo teso in una tranquilla notte ci figuriamo condotto alla Luna, quando è all'incirca 40 gradi sopra l'orizzonte, abbassandolo fino all'orizzonte stesso, ce lo figuriamo terminato non molto di là dei vicini oggetti che ci stanno di fronte; prova evidente della distanza stimata minore.

CAPITOLO XI.

Teoria del moto circolare della Luna intorno alla terra.

139. I movimenti lunari sono molto più complicati ed irregolari dei movimenti solari, e se coll'osservazione sola si è potuto pervenire a determinare con una bastante precisione la legge, cui vanno soggetti i movimenti solari, non si è pervenuto a determinare collo stesso mezzo quella dei movimenti lunari, che molto incompletamente, e dopo reiterati tentativi.

Le tavole lunari sono, è vero, giunte in questi ultimi tempi ad un eminente grado di precisione. Il loro perfezionamento però non è tutto dovuto alle osservazioni, ma bensì ai più fini artifizj d'analisi immaginati successivamente dai sommi geometri Newton, Eulero, Mayer, la Grange, la Place ec., ed alla insigne scoperta della gravitazione universale, a cui fu condotto il Newton dal confronto delle osservazioni

astronomiche fra loro. Dopo una tale scoperta, il problema di determinare i movimenti dei corpi celesti fu ridotto alla meccanica, e dai progressi di questa dipende lo stato dell'Astronomia, ed il perfezionamento delle tavole dei corpi celesti, le osservazioni non somministrando che i dati necessarj per determinare le costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni, e la verificazione della teoria. Non è nostro scopo di esporre le sublimi ricerche di quei sommi Geometri, ma bensì d'indicare, dietro la scorta dell'osservazione, le circostanze principali del moto lunare, e di brevemente esporre i più rimarchevoli risultamenti della teoria, facendone l'applicazione agli usi della vita civile.

140. Da quanto abbiamo detto nella spiegazione delle fasi lunari si raccoglie essere la Luna un corpo opaco di figura sferica, o almeno presso a poco sferica, che si ravvolge intorno alla terra da occidente in oriente, ritornando rapporto al Sole alle stesse posizioni in 29 giorni circa.

Per acquistare ulteriori cognizioni intorno ai movimenti lunari noi supporremo un osservatore giornalmente intento a determinare, mediante lo stromento dei passaggi, ed il quadrante murale, l'*AR* e la declinazione del centro della Luna, notando contemporaneamente il tempo medio del suo passaggio pel meridiano. Avendo osservate le *AR* e le declinazioni del centro della Luna se ne deducano con molta cura le longitudini e latitudini corrispondenti, mediante le formule riferite al capitolo IV.

Se le latitudini risultassero costantemente nulle, sarebbe un indizio sicuro che la Luna si muoverebbe da occidente in oriente sempre nel piano dell'ecclittica. Si è frattanto osservato, che durante una rivoluzione della Luna intorno alla terra le latitudini sono due volte nulle; negli altri giorni sono esse o boreali, od australi. Allorquando le latitudini della Luna sono nulle è chiaro essere il suo centro nell'ecclittica. I punti, nei quali le latitudini lunari sono nulle, corrispondono a longitudini fra loro differenti di 180° incirca. La massima latitudine australe è presso a poco uguale alla massima latitudine boreale, ed il suo valore medio è $= 5° 9' 0''$. Tali osservazioni ci conducono tosto a conchiudere, che il centro della Luna si muove intorno alla terra in un piano inclinato all'orbita dell'ecclittica di 5° 9′ 0″ tagliando l'ecclittica lungo una linea retta che passa per il centro della terra.

141. Alla comune intersezione fra il piano dell'orbita lunare ed il piano dell'ecclittica danno gli Astronomi il nome di *linea dei nodi*, e la sua posizione nell'ecclittica si riconosce dall'osservare la longitudine della Luna, allorquando la sua latitudine divien nulla. La retta condotta per il centro della terra, e per la posizione della Luna a quell'istante è la stessa linea dei nodi.

Allorquando la Luna dall'emisfero australe attraversando l'ecclit-

tica passa nell' emisfero boreale, ossia quando la latitudine della Luna di australe diviene boreale, dicesi che passa per il primo nodo, a cui dassi il nome di *nodo ascendente*. Terminata avendo la porzione della sua orbita situata nell' emisfero boreale, essa attraversa di nuovo l' ecclittica per descrivere l' altra parte nell' emisfero australe. Il punto, in cui l' orbita lunare taglia allora l' ecclittica, appellasi *secondo nodo*, o *nodo discendente*.

Se accade di fare un' osservazione della Luna precisamente quando la sua latitudine è $= 0$, in allora la corrispondente longitudine sarà la *longitudine del nodo ascendente*, se quindi la latitudine diverrà boreale; quella *del nodo discendente*, se la latitudine diverrà australe. Se poi la osservazione della Luna non è fatta precisamente, quando la latitudine è $= 0$, scritte le latitudini vicine in una serie coi tempi corrispondenti, e colle longitudini pure corrispondenti, mediante l' interpolazione si cercherà il momento, in cui la latitudine fu nulla; quindi dalla serie delle longitudini si ricaverà parimente col mezzo dell' interpolazione la longitudine della Luna corrispondente a quell' istante, e questa sarà la longitudine cercata del nodo.

142. Si può determinare la posizione del nodo lunare con due osservazioni della Luna fatte nelle sue vicinanze anche nel modo seguente, ed affine di ottenere maggior precisione nei risultamenti converrà scegliere due osservazioni tali, che una preceda il passaggio della Luna per il nodo, e l' altra lo segua.

(*Fig.* 32) Sia ΥNL l' ecclittica, $\Upsilon' Nl$ il circolo massimo, in cui apparentemente sembra muoversi la Luna; N il nodo. Corrisponda la Luna avanti il suo passaggio pel nodo N al punto l', la cui longitudine $\Upsilon L'$ sia $= L$, e la latitudine australe $L' l' = \lambda$. Nella seconda osservazione sia la Luna in l, avendo una longitudine $\Upsilon L = L'$, ed una latitudine boreale $lL = \lambda'$. Pongasi la longitudine incognita del nodo $N = \Omega$, e l' inclinazione $lNL = i$.

I due triangoli sferici rettangoli $l'NL'$, lNL daranno

$$\tang \lambda = \tang i \operatorname{sen}(\Omega - L); \quad \tang \lambda' = \tang i \operatorname{sen}(L' - \Omega);$$

donde con facili riduzioni otterrassi

$$\frac{\tang \lambda' + \tang \lambda}{\tang \lambda' - \tang \lambda} = \frac{\operatorname{sen}(L' - \Omega) + \operatorname{sen}(\Omega - L)}{\operatorname{sen}(L' - \Omega) - \operatorname{sen}(\Omega - L)};$$

la quale per le note riduzioni somministra la seguente

$$\tang\left[\tfrac{1}{2}(L' + L) - \Omega\right] = \frac{\operatorname{sen}(\lambda' - \lambda)}{\operatorname{sen}(\lambda' + \lambda)} \tang \tfrac{1}{2}(L' - L);$$

donde si otterrà il valore di $\frac{1}{2}(L' + L) - \Omega$; e quindi quello di Ω, che è la longitudine cercata del nodo. Così unendo a due a due le osservazioni precedenti, e le seguenti il passaggio della Luna

per il nodo, se ne potrà determinare la posizione con molta precisione (*).

143. La posizione della linea dei nodi non è fissa nel cielo stellato, vale a dire non corrisponde sempre alla medesima longitudine rapporto all'equinozio, ma diminuisce questa notabilmente con celerità angolare presso a poco uniforme. Così al 1 Gennajo 1800 essa corrispondeva a $33° 14' 7''$, ed al 1 Gennajo 1810 corrispondeva a $199° 50' 32''$ di longitudine, cosicchè retrogradando il nodo aveva percorso un arco di ecclittica $= 193° 23' 35''$ nello spazio di 10 anni, vale a dire in 3652 giorni compresi fra il 1800 ed il 1810. Quindi egli compirà la sua rivoluzione intorno all'ecclittica in $\frac{360 . 3652}{193,393}$ giorni, ossia in $6798^g,2$ corrispondenti a 18 anni comuni e 228 giorni circa. Tale sarebbe la durata della rivoluzione del nodo lunare rapporto all'equinozio mobile di primavera, il quale ha esso pure un movimento retrogrado rapporto alle stelle fisse. Dunque rapporto ad una stella fissa la durata della sua rivoluzione è un poco minore, perchè colla sua retrogradazione il nodo ritornerà prima alla stella, che all'equinozio.

Per trovare la durata della rivoluzione del nodo rapporto ad una stella fissa supponiamo che l'equinozio retrogradando in 365 giorni percorra un arco m; e che il nodo si allontani nel tempo medesimo dall'equinozio di un arco $= n$. È chiaro che il nodo si allontanerà così da un medesimo punto fisso nell'ecclittica dell'arco $m + n$, e quindi chiamata S la durata della rivoluzione del nodo rapporto *alle* stelle fisse, sarà $S = \frac{360°.365}{n + m}$. Frattanto

$$n = \frac{360 . 365}{6798,2} = \frac{360 . 365}{N} = 19°,3287 = 69583'',3 ; \quad m = 50'',2$$

(N rappresenta la durata della rivoluzione del nodo rapporto all'equinozio). Introducendo questo numero N, otterremo

$$S = \frac{N}{1 + \frac{m}{n}} = N\left(1 - \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2} \dots\right),$$ della qual serie i primi due termini danno $S = 6793^g,3$, cioè la rivoluzione del nodo rapporto alle stelle sarà di 5 giorni circa minore di quella rapporto all'equinozio.

(*) Suppone questa regola fisso il nodo nell'ecclittica; ma retrogradando continuamente, come s'indica nel § seguente, abbisogna di una piccola correzione. Fingendo l'inclinazione costante, e chiamando ☊ la posizione del nodo per l'istante di mezzo fra le due osservazioni, $2m$ la quantità totale della sua retrogradazione fra l'una e l'altra, si troverà facilmente

$$\tang \left[\tfrac{1}{2}(L' + L) - ☊\right] = \frac{\text{sen}(\lambda' - \lambda)}{\text{sen}(\lambda' + \lambda)} \tang \tfrac{1}{2}(L' - L + 2m).$$

144. Allorchè un qualunque punto celeste si muove nel cielo stellato, descrivendo apparentemente un circolo massimo della sfera, il tempo impiegato a percorrerlo appellasi *durata della sua rivoluzione*, o semplicemente *rivoluzione*. Se il movimento di quel punto è riferito all' equinozio mobile di primavera, la durata della sua rivoluzione chiamasi *rivoluzione tropica*; se è poi riferito ad un punto fisso del cielo stellato, come ad una stella fissa, appellasi allora *rivoluzione siderale*. La quantità giornalmente da quel punto percorsa valutata nell' ecclittica, od anche nella sua orbita dicesi *moto diurno*, indicando per *moto diurno tropico* quell' arco, di cui allontanasi dall' equinozio in un giorno, e per *moto diurno sidereo* l' arco percorso rapporto ad una stella fissa.

Se la direzione del moto di quel punto è da occidente verso oriente, di modo che le sue longitudini da un giorno all' altro vadano aumentando, il suo moto è dagli Astronomi detto *diretto*, ovvero secondo l' ordine dei segni; nel caso contrario il suo moto è *retrogrado*, o contro l' ordine dei segni, e tende a diminuire la sua giornaliera longitudine, od *AR*.

Ciò posto, il nodo lunare in virtù delle precedenti determinazioni ha un moto retrogrado, tale che la sua rivoluzione tropica sia di $6798^{g},2$, e la sua rivoluzione siderale di $6793,3$;

il suo moto diurno tropico sarà quindi . . $= 3' \; 10'',64$
ed il siderale . . . . $= 3 \; 10 \; ,78$
moto annuo tropico per 365 . . . . . . $= 19^{\circ} \; 19' \; 43'',3$
moto annuo sidereo . . . . $= 19 \; 20 \; 33 \; ,3$

Così mediante questi dati potrassi sempre determinare la posizione del nodo ascendente lunare, partendo dall' epoca sopra riferita del 1800.

145. Passiamo ora ad esporre come col mezzo delle osservazioni pervenire si possa alla cognizione del moto medio della Luna.

Avendo scritto le longitudini e latitudini giornaliere osservate nel momento del passaggio della Luna pel meridiano unitamente al tempo medio corrispondente in una serie, si vedrà da principio che tanto le longitudini, quanto i tempi del passaggio seguono una legge molto irregolare; imperciocchè i tempi del passaggio andranno di giorno in giorno ritardando circa un' ora, e nelle longitudini nè le differenze prime, nè le seconde saranno costanti, ma soltanto le quarte o quinte si avvicineranno ad essere $= 0$. Converrà adunque col mezzo dell' interpolazione ridurre le longitudini osservate a corrispondere ad eguali intervalli di tempo, come di 24 in 24 ore, o di 12 in 12 ore. Avendo così preparate le longitudini osservate, le loro differenze ci daranno la celerità angolare diurna della Luna in longitudine, la quale varierà sensibilmente oscillando fra gli 11° ed i 15°. Si può pertanto concludere, che il moto della Luna è nella sua orbita, come quello

del Sole, regolato da una celerità media, a cui vanno unite delle correzioni variabili e periodiche, le quali facciano oscillare la sua posizione media di 4 o 5 gradi. Siccome queste correzioni (alle quali danno gli Astronomi il nome di *equazioni*) fanno oscillare la celerità della Luna fra limiti discretamente piccoli, si comprende facilmente che la loro influenza sul moto medio sarà tanto più piccola, quanto maggiore sarà lo spazio di tempo, in cui viene distribuita. Donde risulta la seguente regola per trovare il moto diurno tropico della Luna.

Scegliete due osservazioni della Luna lontanissime, nelle quali con molta precisione siasi determinata la longitudine ed il tempo medio corrispondente. Dividete l'arco totale percorso dalla Luna per il numero dei giorni compreso fra le due osservazioni, ed avrete il moto diurno medio ricercato rapporto all'equinozio.

Si è trovato in tal guisa il moto diurno tropico della Luna $= 13^\circ\ 10'\ 35'',027$, e la sua rivoluzione tropica

$$= \frac{360^\circ}{13^\circ\ 10'\ 35'',027} = 27^g,3215824 = 27^g\ 7^h\ 43'\ 4'',72.$$

Se si desidera la rivoluzione siderale della Luna convien osservare, che durante la rivoluzione tropica retrogradando l'equinozio, essa torna ad incontrare prima l'equinozio che il punto fisso del cielo stellato, col quale confondevasi nel principio della rivoluzione. Quindi la rivoluzione siderale sarà più lunga, e siccome in $27^g,321$ l'equinozio retrograda di $3'',759$ (arco percorso dalla Luna in $6'',85$), così la durata della rivoluzione siderale sarà $= 27^g\ 7^h\ 43'\ 11'',57$.

146. La rivoluzione della Luna rapporto al suo nodo deve essere minore della rivoluzione periodica, perchè retrogradando il nodo, la Luna lo torna ad incontrare prima di essere ritornata all'equinozio, supponendo che in un qualche tempo coincidessero la Luna, l'equinozio, ed il nodo ascendente. Per trovare poi la durata della rivoluzione della Luna rapporto al nodo

sia la rivoluzione periodica della Luna espressa da . . T
la rivoluzione incognita rapporto al nodo . . . . N
il moto diurno retrogrado del nodo . . . . n
quindi in N giorni avrà il nodo retrogradato di . . . Nn

e l'arco, che la Luna dovrà percorrere per ritornare al nodo in virtù del suo moto tropico sarà $= 360^\circ - Nn$. Avremo quindi la proporzione $T : 360 :: N : 360 - Nn$, donde rilevasi $N = \frac{360\,T}{360 + nT}$. Se ora chiamiamo t il moto diurno tropico della Luna (osservando che $t = \frac{360}{T}$), avremo $N = \frac{Tt}{t+n} = \frac{T}{1+\frac{n}{t}} = T\left(1 - \frac{n}{t} + \frac{n^2}{t^2} \ldots\right)$.

Ponendo pertanto

$t = 13° \; 10' \; 35'',03 = 790',5838 \; ; \quad n = 3' \; 10'',64 = 3,1773 \; ,$

troverassi $N = 27^g,21222 = 27^g \; 5^h \; 5' \; 35'',8$.

147. Per ultimo la rivoluzione media della Luna rapporto al Sole, ossia l'intervallo medio fra due consecutivi novilunj, o fra due consecutive simili fasi della Luna, è più lunga della rivoluzione tropica, giacchè il Sole e la Luna si muovono verso la medesima parte.

Se rappresentiamo per S la rivoluzione della Luna rapporto al Sole, chiamando s il moto diurno tropico del Sole, e t il moto diurno tropico della Luna, si otterrà (ragionando come nel num. preced.)

$S = \frac{T}{1 - \frac{s}{t}} = T\left(1 + \frac{s}{t} + \frac{s^2}{t^2} + \frac{s^3}{t^3} \ldots\right)$; sostituendo per s, t, T

i loro valori ottiensi $S = 29^g,5305885$, ossia $S = 29^g \; 12^h \; 44' \; 2'',85$.

A questa rivoluzione, che riconduce i novilunj o le fasi lunari dassi il nome di *rivoluzione lunare sinodica*, od anche *mese lunare sinodico*.

Questa rivoluzione è quella che ci viene direttamente somministrata quando si paragonano gli ecclissi lunari antichi (le sole osservazioni fatte dagli antichi Astronomi con qualche precisione) con le osservazioni degli ecclissi ai nostri giorni.

La quantità media, di cui la Luna allontanasi giornalmente dal Sole nell'ecclittica è $= \frac{360°}{S} = 12°,190749 = 12° \; 11' \; 26'',70$, che appellasi *moto diurno sinodico*, a cui aggiungendo il moto diurno tropico del Sole formerassi il moto diurno tropico della Luna, che potrà servire a trovare le altre rivoluzioni medie, delle quali abbiamo finora parlato.

CAPITOLO XII.

Della figura dell' orbita della Luna; sua eccentricità, moto dell' apogeo, e sue principali disuguaglianze.

148. Dopo di aver determinato la posizione del piano dell'orbita lunare rapporto all'ecclittica, e la durata delle sue medie rivoluzioni tropica, siderale e sinodica, passiamo a vedere come le osservazioni ci conducano alla scoperta della sua vera orbita.

A tale oggetto noi supporremo di avere una serie di longitudini e latitudini osservate per una o più rivoluzioni sinodiche della Luna ridotte a corrispondere ad uguali intervalli di tempo, come di 24 in 24

ore, o meglio ancora di 12 in 12 ore. Noi supporremo inoltre, che queste osservazioni siano tali, quali sarebbero vedute dal centro della terra, quantunque osservate alla superficie, riservandoci al capitolo seguente di esporre le correzioni, che alle osservazioni devonsi fare per ridurle al centro della terra. Ciò premesso, convien ridurre ciascuna osservazione al piano dell' orbita lunare.

(*Fig.* 32) Sia $\Upsilon N L$ l' ecclittica, $\Upsilon' N l$ il circolo massimo della sfera celeste determinato dal piano dell' orbita lunare, N il nodo ascendente, la cui longitudine $N\Upsilon = \Omega$ è già conosciuta. Ad un dato istante sia la Luna in l; la sua latitudine osservata sarà lL, e la sua longitudine ΥL. Prendasi nell' orbita della Luna un punto Υ' tale che sia $\Upsilon' N = \Upsilon N = \Omega$. Al punto Υ' sogliono gli Astronomi riportare la posizione della Luna nell' orbita, la quale sarà così determinata per l' arco $\Upsilon' l$, a cui dassi il nome di *longitudine nell' orbita*. Ponendo $lL = \lambda$, $\Upsilon L = L$, $\Upsilon' l = P$, avremo dal triangolo lNL per determinare P l' equazione $\cos(P - \Omega) = \cos\lambda \cos(L - \Omega)$, donde facilmente rileverassi la longitudine P nell' orbita.

149. Egli è più comodo determinare P mediante le sole longitudini osservate, servendosi dell' angolo N già precedentemente determinato. In fatti ponendo l' angolo $N = i$, il triangolo rettangolo LNl dà $\tang(P - \Omega) = \frac{\tang(L - \Omega)}{\cos i}$, la quale confrontata coll' equazione $\tang x = m \tang y$ (Trig. IV) darà $m = \frac{1}{\cos i}$; $\theta = \frac{1 - m}{1 + m} = -\tang^2 \tfrac{1}{2} i$, e quindi dalla serie (5) si otterrà

$$P = L + \tang^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen} 2(L - \Omega) + \tfrac{1}{2}(\tang^4 \tfrac{1}{2} i) \operatorname{sen} 4(L - \Omega) + \text{ec.}$$

Posto successivamente $i = 5° 0' \ldots 5° 16'$, che sono i suoi limiti estremi, otterremo in numeri (riducendo i coefficienti a secondi)

$$(1)\ P = L + 6' 33'',2 \operatorname{sen} 2(L - \Omega) + 0'',4 \operatorname{sen} 4(L - \Omega)$$
$$(2)\ P = L + 7\ \ 16\ ,3 \operatorname{sen} 2(L - \Omega) + 0\ ,4 \operatorname{sen} 4(L - \Omega)$$

Non si commetterà pertanto un errore molto forte (trascurabile in una prima approssimazione) se supporremo fisso il piano dell' orbita lunare, e ridurremo all' orbita le osservazioni, assumendo l' inclinazione 5° 9'. Trascurando inoltre l' ultimo termine, che non arriva giammai ad un secondo, avremo prossimamente $P = L + 6' 57'' \operatorname{sen} 2(L - \Omega)$.

150. Avendo scritto i valori di P in una serie, vi si aggiungano eziandio i corrispondenti diametri apparenti della Luna, e si prendano le successive differenze dei valori di P, le quali esprimeranno la celerità angolare diurna della Luna. Avremo occasione di osservare 1.° che quando queste differenze vanno aumentando, aumentano pure i diametri osservati, e viceversa; 2.° che essendo massima la celerità giornaliera della Luna, è massimo eziandio il diametro; quando quella è mi-

nima, questo pure è minimo; 3.° che quando la celerità angolare uguaglia il moto medio, il diametro ha pure all'incirca un valore medio fra il massimo ed il minimo. Laonde con ragionamenti analoghi a quelli da noi praticati nella teoria del Sole conchiuderemo, che la Luna descrive nel determinato piano un' orbita rientrante avvicinandosi ed allontanandosi in essa successivamente dalla terra. Dimostreremo al modo stesso che la figura della curva dalla Luna descritta è all'incirca quella di un'ellisse, la periferia della quale è in modo da essa percorsa, che la sua celerità angolare vada all' incirca aumentando e diminuendo in ragione inversa dei quadrati delle distanze, donde concluderemo che le aree percorse dai raggi vettori sono proporzionali ai tempi, o per lo meno non molto si allontanano da questo rapporto.

Chiamerassi *apogeo* il punto dell'orbita più lontano dal centro della terra (situata in uno dei fochi dell'ellisse), e chiamerassi *perigeo* il punto più vicino. La posizione dell'apogeo e del perigeo vien determinata dalla posizione della Luna quando essa ha il minimo ed il massimo diametro, oppure la minima e la massima celerità.

151. Diamo ora i valori numerici approssimati degli elementi dell' orbita ellittica della Luna dedotti da queste considerazioni.

(*Fig.* 20) Rappresenti $\Upsilon A P$ il circolo massimo, il di cui piano contiene l'orbita della Luna, e sia T il suo centro, che dobbiamo al tempo stesso riguardarlo come centro della nostra terra, e come uno dei fochi dell'ellisse EBN percorsa dalla Luna. Υ sia il punto, da cui si contano le longitudini nell'orbita, A l'apogeo, P il perigeo dell' orbita lunare. L'arco $A\Upsilon$ determina la longitudine dell' apogeo lunare, a cui aggiungendo 180° si ha la longitudine del perigeo. Assumasi per unità di misura la metà dell'asse maggiore EN, e pongasi l'eccentricità $=e$, cosicchè la distanza apogea ET sia $=1+e$, e la distanza perigea $TN=1-e$.

Frattanto il massimo diametro della Luna osservato in $N = 33' \, 30''$
ed il minimo osservato in E . . . . $= 29 \; 30$

Siccome poi i diametri di un medesimo oggetto sono fra loro in ragione inversa delle distanze, così avremo $1+e : 1-e :: 33'30'' : 29'30''$,

donde ricaveremo $e = \dfrac{240''}{3780} = 0{,}0635$.

Pertanto l'eccentricità dell'orbita lunare è molto maggiore dell'eccentricità dell'orbita solare, non essendo quest'ultima che circa 0,017; donde ne risulterà per la Luna una equazione del centro molto più considerabile. Combinando ora la forte celerità media della Luna colla grandezza dell'equazione dell'orbita si vedrà il motivo, per cui essa va sottoposta a variazioni così notabili nella sua celerità giornaliera.

152. L'apogeo ed il perigeo dell'orbita lunare non sono fissi nel

cielo stellato, giacchè la Luna non trovasi avere il minimo ed il massimo diametro sempre alla stessa longitudine nell'orbita, ma si avanzano da occidente verso oriente con moto pressochè uniforme, compiendo la loro tropica rivoluzione in 9 anni circa, o più esattamente in $3231^g\ 8^h\ 34'\ 57''$, donde risulta che il moto diurno dell'apogeo lunare è $= 6'\ 41'',07$.

La rivoluzione della Luna rapporto all'apogeo (a cui dassi il nome di *rivoluzione anomalistica*) è più lunga della rivoluzione tropica, e chiamando n il moto diurno dell'apogeo, T la rivoluzione tropica della Luna, A la rivoluzione anomalistica cercata, t il moto diurno tropico, otterremo con ragionamenti simili a quelli del § 146

$$A = \frac{360\,T}{360 - n\,T}, \text{ ovvero } A = \frac{T}{1 - \frac{n}{t}} = T\left(1 + \frac{n}{t} + \frac{n^2}{t^2} + \ldots\right),$$

dalla qual formula, sostituendo i valori di T, n, t, si otterrà $A = 27^g,554560 = 27^g\ 13^h\ 18'\ 34''$.

La rivoluzione anomalistica serve a calcolare l'anomalia media della Luna, ossia l'angolo, di cui la Luna si allontana dall'apogeo in un dato tempo t in virtù del suo moto medio. Chiamata z l'anomalia media della Luna ad un dato tempo t decorso dopo il passaggio per l'apogeo, ed A la durata della rivoluzione anomalistica, avremo $A : 360^\circ :: t : z = \frac{360\,t}{A}$. Ciò si dimostra come nella teoria del Sole (§ 83 cor. II).

153. Movendosi la Luna in un'orbita ellittica, e descrivendo in essa il raggio vettore aree proporzionali ai tempi, potremo alla fine del tempo t determinare la posizione vera della Luna nella sua orbita mediante quelle stesse formule, di cui ci siamo serviti nella teoria del Sole per determinare l'anomalia vera, ed il raggio vettore, data essendo l'anomalia media.

Sia adunque, come nella teoria del Sole, z l'anomalia media alla fine del tempo t, principiando a contarlo da un passaggio determinato della Luna per il perigeo; v l'anomalia vera corrispondente; e l'eccentricità dell'orbita lunare; E l'anomalia eccentrica; r il raggio vettore; a il semiasse maggiore. Avremo per determinare E, v ed r le seguenti equazioni (§ 84)

$$(1)\quad z = \frac{360\,t}{A} = E - e \operatorname{sen} E;$$

$$(2)\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E; \qquad (3)\quad r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos v};$$

alle quali si potranno applicare tutti quei compendj di calcolo che si esposero nella teoria del Sole.

Determinata l'anomalia vera v, si sommerà con la longitudine del perigeo corrispondente alla fine del tempo t, e si avrà la longitudine della Luna nella sua orbita.

Egli è più comodo ed anche più spedito determinare v col mezzo della serie assegnata nel § 89, che ridotta a numeri ponendo $e = 0,0635$ darà

$$v = z + 7^\circ\, 16'\, 22'' \operatorname{sen} z + 17'\, 18'' \operatorname{sen} 2z + 57'' \operatorname{sen} 3z + 4'' \operatorname{sen} 4z \ldots$$

dalla quale si può con somma facilità dedurre una tavola, che ad ogni valore di z somministri il corrispondente valore di e.

Scolio. Siccome il valore di e, la posizione ed il moto dell'apogeo, e quindi quello anche del perigeo, sono stati determinati colle osservazioni dei diametri, così poco si può contare sulla loro esattezza; e perciò nel seguente problema esporremo il metodo di determinare con maggior precisione questi elementi dell'orbita lunare.

Problema. Avendo tre longitudini vere osservate in uno stesso mese, e ridotte all'orbita, determinare con maggior precisione gli elementi dell'orbita lunare già prossimamente noti.

154. Noi supporremo che il moto medio lunare, ed il moto del perigeo siano ben conosciuti, cosicchè dalla loro parte non si possa temere errore sensibile nell'intervallo di un mese, e nel tempo stesso che l'eccentricità e la longitudine del perigeo siano così prossimi al vero da poter somministrare, senza errore sensibile nella equazione del centro, i termini dipendenti da e^2, $e^3 \ldots$ Posto ciò, siano le tre longitudini vere date l, l', l''; le tre corrispondenti longitudini del perigeo π, $\pi + m$, $\pi + m'$. Siano inoltre gl'intervalli di tempo fra la prima e la seconda, e fra la prima e la terza osservazione t, t'. Rappresentato il moto diurno tropico per n, le tre longitudini medie corrispondenti saranno p, $p + nt$, $p + nt'$. Indichiamo inoltre le tre anomalie vere per v, v', v''; e le tre anomalie medie corrispondenti per z, z', z''. Sarà evidentemente

$$v = l - \pi, \quad v' = l' - \pi - m, \quad v'' = l'' - \pi - m',$$

$$z = p - \pi, \quad z' = p - \pi + nt - m, \quad z'' = p - \pi + nt - m'.$$

Poste queste denominazioni riprendiamo la serie sopraccitata

$$v = z + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \operatorname{sen} z + \frac{5}{4} e^2 \operatorname{sen} 2z + \frac{13}{12} e^3 \operatorname{sen} 3z + \ldots$$

Riguardando come conosciuti senza errore sensibile i termini dipendenti da e^2, e^3, $e^4 \ldots$ li ridurremo a numeri per ogni osservazione, e li supporremo respettivamente uguali ad r, r', r''. Avremo quindi pelle tre osservazioni le tre seguenti equazioni

$$l - \pi = p - \pi + 2e \operatorname{sen}(p - \pi) + r$$

$$l' - \pi - m = p - \pi + nt - m + 2e \operatorname{sen}(p - \pi + nt - m) + r'$$

$$l'' - \pi - m' = p - \pi + nt' - m' + 2e \operatorname{sen}(p - \pi + nt' - m') + r''$$

dalle quali dovremo dedurre i valori delle tre incognite p, π, e.

A tale oggetto si sottragga successivamente la prima equazione dalla seconda e dalla terza, e ponendo per brevità

$$A = \frac{l' - l - nt - r' + r}{4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(nt - m)}; \quad A' = \frac{l'' - l - nt' - r'' + r}{4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(nt' - m')};$$

ed inoltre $p - \pi = z$, $nt - m = a$, $nt' - m' = a'$, avremo

$$e \cos(z + \tfrac{1}{2} a) = A; \qquad e \cos(z + \tfrac{1}{2} a') = A'.$$

Per dedurre da queste due equazioni i valori di e, e di z faremo uso dell' artifizio già adoperato al § 58; si aggiunga cioè e si sottragga all' arco sotto il segno di coseno una quantità h. Fatti poi gli opportuni sviluppi si troverà

$$e \cos(h - \tfrac{1}{2} a) \cos(z + h) + e \operatorname{sen}(h - \tfrac{1}{2} a) \operatorname{sen}(z + h) = A$$
$$e \cos(h - \tfrac{1}{2} a') \cos(z + h) + e \operatorname{sen}(h - \tfrac{1}{2} a') \operatorname{sen}(z + h) = A'$$

donde deducesi facilmente

$$e \operatorname{sen}(z + h) = [A \cos(h - \tfrac{1}{2} a') - A' \cos(h - \tfrac{1}{2} a)] : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a' - a)$$
$$e \cos(z + h) = [A' \operatorname{sen}(h - \tfrac{1}{2} a) - A \operatorname{sen}(h - \tfrac{1}{2} a')] : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a' - a)$$

che, a motivo di h arbitrario, somministrano molte formule, fra le quali comodissime al calcolo logaritmico sono le seguenti

1.° Pongasi $h = \frac{1}{2} a$, avremo

$$(1)\quad e \operatorname{sen}(z + \tfrac{1}{2} a) = \frac{A \cos \frac{1}{2}(a' - a) - A'}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a' - a)}; \quad (2)\quad e \cos(z + \tfrac{1}{2} a) = A;$$

dividendo la prima per la seconda si otterrà $\operatorname{tang}(z + \frac{1}{2} a)$, e quindi sarà noto $z + \frac{1}{2} a$, e perciò z; dopo di che le equazioni (1), (2) danno il valore di e.

2.° Ponendo del pari $h = \frac{1}{2} a'$, otterremo

$$(3)\quad e \operatorname{sen}(z + \tfrac{1}{2} a') = \frac{A - A' \cos \frac{1}{2}(a' - a)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a' - a)}; \quad (4)\quad e \cos(z + \tfrac{1}{2} a') = A';$$

le quali somministreranno al modo stesso z ed e.

3.° Per ultimo ponendo $h = \frac{1}{4}(a' + a)$, otterremo

$$(5)\quad e \operatorname{sen}[z + \tfrac{1}{4}(a' + a)] = (A - A') \cos \tfrac{1}{4}(a' - a) : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a' - a)$$
$$(6)\quad e \cos[z + \tfrac{1}{4}(a' + a)] = (A + A') \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}(a' - a) : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a' - a)$$

dalle quali si ha $\operatorname{tang}[z + \frac{1}{4}(a' + a)] = \frac{A - A'}{A + A'} \cot \frac{1}{4}(a' - a)$. Conosciuto z, col mezzo delle equazioni (5), (6) troverassi l'eccentricità e.

155. *Scolio*. Avendo determinato con le formule precedenti l'eccentricità dell' orbita lunare, e la posizione del perigeo, adoperando tre osservazioni, che abbraccino all'incirca tutta l'orbita della Luna, si calcoleranno di nuovo nel valore di v i coefficienti di sen z, sen $2z$ ec., e così si potrà ad ogni istante conoscere l'anomalia vera, data essendo la media. Confrontando le longitudini osservate con le longitudini calcolate si troverà che il calcolo differisce notabilmente dalle osservazioni ora in più ed ora in meno, donde potrassi a primo aspetto de-

durre, che la sola equazione del centro non è bastante a rappresentare con qualche precisione i movimenti lunari. Facendo gli stessi confronti per molte rivoluzioni sinodiche della Luna, ed osservando l'andamento degli errori, tosto uno potrà accorgersi, che ritornata la Luna alle stesse posizioni rapporto al Sole, e rapporto al suo perigeo hanno luogo presso a poco le stesse differenze fra l'osservazione ed il calcolo. Laonde convien concludere, che la supposizione del moto ellittico non è sufficiente a rappresentare i movimenti lunari, ma che conviene ammettere delle altre irregolarità dipendenti dalla posizione del Sole, e del perigeo sì lunare, che solare. Tolomeo, Keplero, Ticone furono i primi a sentire la necessità di queste nuove correzioni, ed a forza di confronti numerici istituiti con molta sagacità pervennero a scuoprire tre *equazioni* principali (così chiamarono essi quelle correzioni), le quali rappresentavano bastantemente i moti lunari. Chiamando v l'anomalia vera della Luna calcolata nell'ellisse, ☽ la sua longitudine media, ☉ la longitudine media del Sole, z l'anomalia media della Luna, si trovò empiricamente che la longitudine della Luna nell'orbita espressa per P è all'incirca rappresentata da

$$P = v + \pi + 1^\circ\, 20'\, 30'' \text{ sen}[2(☽ - ☉) - z] + 35'\, 6'' \text{ sen } 2(☽ - ☉) + 11'\, 10'' \text{ sen anom. media di } ☉ .$$

La prima di queste equazioni, che è la più forte, ha ottenuto presso gli Astronomi il nome di *evezione*, e si ristabilisce per gli stessi gradi e periodi dopo $31^g\ 19^h\ 26'$. La seconda chiamasi variazione, la quale dipendendo dalla distanza media della Luna dal Sole si ristabilisce in una mezza rivoluzione sinodica della Luna, vale a dire in $14^g\ 13^h\ 50'$ circa. La terza correzione chiamasi *equazione annuale*, e si ristabilisce dopo una rivoluzione anomalistica del Sole.

156. Gli angoli scritti sotto il segno trigonometrico *seno*, dai quali dipende la grandezza dell'equazione ad ogni istante, sono dagli Astronomi chiamati *argomenti dell'equazione*. Essi sono espressi in funzione delle longitudini medie del Sole e della Luna, e siccome sì l'una che l'altra aumentano proporzionalmente al tempo, così possono essi riguardarsi come funzioni del tempo. Segue di qui il metodo di scuoprire dopo quanto tempo un'equazione ricondurrà le stesse correzioni; egli è evidente, che essa riconduce le stesse correzioni quando l'argomento ha aumentato di 360°. Prendiamo ad esempio l'argomento dell'evezione. Sia n il moto diurno tropico della Luna; α il suo moto diurno anomalistico, ed s il moto diurno tropico del Sole. La quantità, di cui giornalmente aumenta l'argomento dell'evezione è $= 2n - 2s - \alpha$; e quindi il numero dei giorni opportuni, perchè egli aumenti di 360° sarà dato da $\dfrac{360^\circ}{2n - 2s - \alpha}$, ove sostituendo i

valori di n, s ed α espressi in gradi si avrà il periodo dell'evezione sopra indicato.

157. Le tre nominate equazioni sono le sole che ritrovate furono dagli antichi colla sola osservazione. Ma dopo la scoperta dell'attrazione universale, molte altre ne indicò la teorica, le quali introdotte nelle tavole lunari le ricondussero ad una tale esattezza, che è appena lecito desiderarne una maggiore, e l'esimio accordo della teorica colle osservazioni forma al tempo stesso la più bella conferma dell'attrazione universale. La stessa teoria ha spiegato mirabilmente alcune piccole anomalie, o vogliamo dire irregolarità periodiche osservate nella latitudine della Luna, in virtù delle quali l'inclinazione dell'orbita lunare sembra oscillare fra i limiti di 5° 0', e 5° 16', ed ha determinato le correzioni da applicarsi alla latitudine calcolata mediante l'inclinazione 5° 9' per ottenere le vere latitudini della Luna.

158. La precisione apportata alle tavole lunari ha fatto eziandio scuoprire un altro fenomeno singolare, ed è che i moti medj della Luna, del nodo e del perigeo non sono costanti. Si è trovato che il moto medio della Luna si va accelerando di secolo in secolo, mentre il moto medio del nodo e del perigeo va ritardando. Sebbene tali acceleramenti siano molto piccoli, pure alterando il moto medio si sono successivamente accumulati i loro incrementi, e da principio scoperti colle sole osservazioni da Halley, verificati successivamente da altri Astronomi di somma riputazione, furono finalmente da la Place con somma felicità spiegati combinando l'attrazione solare sopra la Luna con la diminuzione secolare dell'eccentricità dell'orbita terrestre. Ecco come coll'osservazione si pervenne a scuoprire l'acceleramento del moto lunare, ed il ritardo del moto del nodo e del perigeo.

Immaginiamoci di avere tre o quattro buone osservazioni della Luna ridotte all'orbita ad epoche molto fra loro lontane, come di 100 in 100 anni. Corrispondano queste ai tempi T', T'', T''' ridotti ad una stessa epoca, ed a un medesimo meridiano, e vengano indicate per P', P'', P'''.

Sia ora generalmente z l'anomalia media in un'osservazione; π la longitudine del perigeo, E l'equazione del centro, S la somma di tutte le disuguaglianze periodiche dovute all'azione combinata del Sole e della terra. Sarà $P = z + \pi + E + S$, e quindi la longitudine media $z + \pi = P - E - S$, essendo P dato dall'osservazione; E ed S con molta esattezza conosciute, in quanto che esse non dipendono che dalle sole equazioni periodiche. Quindi se nella longitudine media $z + \pi$ rimarrà qualche incertezza, essa sarà dovuta al moto medio mal conosciuto. Formisi pertanto per ogni osservazione la quantità $z + \pi$. Avremo così per gl'indicati tempi

$$\begin{array}{l|l} T' & z' + \pi' = M' \\ T'' & z'' + \pi'' = M'' \\ T''' & z''' + \pi''' = M''' \end{array}\text{; ec.}$$

Se le quantità $\frac{M''-M'}{T''-T'}$; $\frac{M'''-M''}{T'''-T''}$ ec. esprimenti il moto medio diurno lunare sono uguali, allora esso sarà uniforme; in caso diverso varierà col tempo. Questa variazione esiste effettivamente, ed è stata trovata lentissima, e soltanto sensibile in un mezzo secolo, od in un secolo, e perciò le è stato dato il nome di *variazione secolare*. Ora essa non può essere proporzionale al tempo semplice, perchè allora non presenterebbe che una correzione al moto medio, in virtù della quale egli diventerebbe o assolutamente maggiore, od assolutamente minore. In fatti posto il moto medio $= n$, e le differenze dei tempi $T''-T'=t'$, $T'''-T''=t''$ ec. avremo evidentemente $M''=M'+nt'$, $M'''=M''+nt''$. Se dunque la variazione secolare fosse proporzionale al tempo semplice, sarebbe la sua correzione della forma $\alpha t'$, $\alpha' t''$ ec., e si sommerebbe con nt', nt'' ec. Conviene adunque ammettere una variazione secolare, la quale aumentar faccia il moto medio in ragione delle potenze superiori del tempo. Porremo pertanto generalmente

$$M''=M'+nt'+\alpha t'^2+\beta t'^3+\ldots;\ M'''=M''+nt''+\alpha t''^2+\beta t''^3+\ldots$$

e formeremo così tante equazioni, quante sono le osservazioni date ad epoche lontanissime meno una, dalle quali ricaveremo i valori dei coefficienti indeterminati n, α, β.

Si è così trovato, che chiamando L la longitudine media della Luna al 1 Gennajo 1800; m il moto medio per un secolo; n il tempo da decorrere dopo il 1800 espresso in secoli o parti di secolo, la longitudine media alla fine del tempo n è

$$= L + m\,n + 10'',2067\,n^2 + 0'',01854\,n^3,$$

il tempo n avanti il 1800 dovendo essere considerato come negativo. Vi è dunque una reale accelerazione nel moto medio della Luna proporzionale al quadrato dei secoli, la quale è circa di 10'',2 per 100 anni.

159. La teoria generale dell' attrazione dimostra, che questa formula è soltanto approssimata, e che collo svolgersi dei futuri secoli una tale accelerazione a poco a poco diminuirà finchè si riduca ad un reale ritardo.

Si è scoperto del pari una diminuzione nel moto del perigeo lunare, che risulta circa tre volte maggiore dell' accelerazione del moto medio, ed un ritardo secolare nel moto retrogrado del nodo, che è 0,735 dell' accelerazione dello stesso moto medio. La teoria di la Place spiegando a meraviglia queste variazioni secolari del nodo e del

perigeo dimostra, che eziandio queste lentissime variazioni sono sottoposte ad un periodo di molti secoli, e per questa ragione l'osservazione non ce le ha potuto presentare sotto la loro vera forma, poichè la storia dell'Astronomia non risale ad epoche così lontane da poterci somministrare osservazioni tali, in cui il periodo di queste variazioni sia stato esaurito. I nostri tardi nepoti potranno verificare col fatto le nostre congetture, ed ammirare lo sforzo dell'umano ingegno che ha saputo svelare il secreto, nel quale la natura sembra aver voluto occultare i più alti misteri del sistema del mondo.

CAPITOLO XIII.

Della paralasse e del diametro lunare.

160. Abbiamo supposto fino ad ora, che tutte le osservazioni astronomiche fatte alla superficie terrestre venissero ridotte al centro della terra. La correzione che loro conviene applicare pel Sole e pei pianeti è sempre di pochi secondi; per le stelle fisse è affatto insensibile, come si dimostrerà altrove; ma per la Luna può arrivare ad un grado, ed anche oltrepassarlo; perciò è necessario indagare la natura di tal correzione, ed esporre i metodi dagli Astronomi praticati per applicarla alle *AR* e declinazioni osservate, non che alle longitudini e latitudini.

(*Fig.* 23) Rappresenti a tale oggetto ATB il globo terrestre, A il luogo dell'osservatore, Z il suo zenit, e l'orizzonte sia rappresentato in AS perpendicolare ad AZ. Sia la Luna, in virtù del suo moto diurno, giunta in L; dall'osservatore in A è riportata in l' nel cielo stellato lungo la linea AL, e dal centro della terra in l lungo la linea CLl. L'arco $l'l$, ossia l'angolo $l'Ll$ che lo misura (giacchè per la immensa distanza del cielo stellato può L riguardarsi come centro di esso) chiamasi *paralasse*, e dagli antichi appellavasi *differenza d'aspetto*. Esso è ancora uguale all'angolo, sotto del quale un osservatore al centro della Luna vedrebbe il raggio AC della nostra terra.

161. Si comprende facilmente da questa definizione, che l'effetto della paralasse è tutto compreso nel piano del triangolo ALC, ed in virtù di essa non declina la Luna nè a destra, nè a sinistra del medesimo piano, e siccome questo piano passa lungo AC perpendicolare all'orizzonte, la paralasse produrrà tutto il suo effetto in altezza lasciando ad ogni istante gli azimut inalterati. Ne segue ancora che in virtù della paralasse le altezze degli astri vengono diminuite, e le di-

stanze dal zenit per lo contrario saranno aumentate. Quindi se si sarà osservata l'altezza e l'azimut di un astro alla superficie della terra, per ridurre l'osservazione a quella che si farebbe al centro C di essa, basterà aumentare l'altezza di una quantità uguale alla paralasse ALC.

162. Ciò posto, sia
la distanza apparente ZAL dell'astro L dal zenit $Z = a'$
la distanza vera ZCL veduta dal centro della terra $= a$
la paralasse, ossia l'angolo L . . . . $= p$
il raggio AC della terra sia essa sferica o no . . $= r$
la distanza LC dell'astro dal centro della terra . $= d$

Nel triangolo ALC avremo $\text{sen}\, a' : \text{sen}\, p :: d : r$, donde deducesi $\text{sen}\, p = \frac{r}{d} \text{sen}\, a'$. Ora anche nel caso, in cui l'astro L è la Luna, non oltrepassando l'angolo p i $62'$, si potrà senza errore sensibile porre $\text{sen}\, p = p$; quindi si avrà in generale $p = \frac{r}{d} \text{sen}\, a'$ . . . (1)

Coroll. I. Posto $a' = 90°$, ossia posto l'astro L all'orizzonte apparentemente, sarà $p = \frac{r}{d}$, e perciò la *paralasse orizzontale*, tutte le altre cose essendo uguali, *è la più grande*. Da ora innanzi indicheremo la paralasse orizzontale colla lettera π, e colla lettera p la paralasse di altezza, cosicchè sarà $\pi = \frac{r}{d}$, e $p = \pi\, \text{sen}\, a' = \pi \cos \text{alt. appar.}$

Coroll. II. Cresce la paralasse orizzontale coll'aumentare il raggio r della terra, o col diminuire la distanza d dell'astro dal centro della medesima. Per una stessa distanza d, la paralasse è massima quando sarà r massimo. Si dimostrerà, quando tratteremo della figura della terra, che essa è uno sferoide ellittico, prodotto dalla rivoluzione di un'ellisse intorno all'asse dell'equatore, e che la massima sezione ha luogo all'equatore terrestre. Così i raggi dell'equatore sono i più grandi, ed ivi la paralasse orizzontale è più grande che in qualsivoglia altro luogo della superficie terrestre. Chiameremo paralasse equatoriale la paralasse orizzontale all'equatore, e la indicheremo colla lettera ω. Ponendo pertanto il raggio dell'equatore terrestre $= 1$, sarà $\omega = \frac{1}{d}$, e $\pi = \frac{r}{d} = r\omega$. Quindi otterrassi la paralasse orizzontale per un qualunque luogo della terra moltiplicando la paralasse equatoriale ω per il raggio corrispondente ad esso luogo.

Scolio. La figura della terra è quella di uno sferoide ellittico di rivoluzione, ed il rapporto degli assi che meglio sembra soddisfare alle osservazioni è di $333 : 334$. Donde si vede che i raggi terrestri po-

chissimo fra loro differiranno, e si potranno sempre porre $= 1$, a meno che non si desideri somma precisione. Nelle tavole lunari si danno per ogni grado di latitudine calcolati i valori di r, col mezzo dei quali dalla paralasse equatoriale si deduce la paralasse orizzontale corrispondente ad un dato luogo, e noi pure nella figura della terra daremo la formula opportuna al calcolo dei valori di r per le diverse latitudini.

163. Vorrebbe ora l'ordine naturale che si passasse all'esposizione dei metodi opportuni per determinare la paralasse lunare; ma siccome vi è un legame strettissimo fra la paralasse lunare ed il suo diametro apparente, così ci faremo in questo luogo ad esporlo.

(*Fig.* 23) Sia il semidiametro della Luna veduto da $C = \delta$
il semidiametro app. veduto da A quando trovasi in $L = \delta'$
il raggio del globo lunare espresso in semidiametri
della terra sia rappresentato da . . . . $= g$
la distanza LC della Luna dal centro della terra . $= d$
la sua distanza LA dal punto A . . . . $= d'$

Si avrà dietro i principj di ottica $\delta = \frac{g}{d}$, $\delta' = \frac{g}{d'}$. Quindi (dividendo una equazione per l'altra) $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{d}{d'}$. Ma il triangolo LAC (ritenendo le denominazioni degli articoli precedenti) porge
$d : d' :: \text{sen}\, a' : \text{sen}\, a :: \text{sen}\,(a + p) : \text{sen}\, a$. Avremo pertanto
$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{\text{sen}\,(a+p)}{\text{sen}\, a} = \frac{\text{sen}\, a'}{\text{sen}\,(a' - p)}$. Apparisce da questa equazione, che il diametro della Luna aumenta a proporzione che essa va inalzandosi sopra l'orizzonte, e si vede al tempo stesso qual sia la legge del suo aumento.

Avendosi $\delta = \frac{g}{d}$, $\pi = \frac{r}{d}$, se ne deduce $\frac{\pi}{\delta} = \frac{r}{g} =$ costante. Laonde il rapporto della paralasse orizzontale al semidiametro lunare, qualunque sia la distanza della Luna dal centro della terra, è costante, e determinato una volta con tutta precisione darà un metodo facilissimo di riconoscere la paralasse orizzontale, quando sia noto il semidiametro veduto dal centro della terra. Un tal rapporto dietro le determinazioni del sig. de Lambre è $= 3,6641$, cosicchè si avrà sempre $\frac{\pi}{\delta} = A = 3,6641$.

164. Si può eziandio esprimere la paralasse orizzontale π per mezzo del numero A, e del diametro apparente δ' osservato in una distanza a' dal zenit. In fatti l'equazione superiore $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{\text{sen}\, a'}{\text{sen}\,(a' - p)}$

dà $\delta = \frac{\text{sen}\,(a' - p)}{\text{sen}\,a'}\delta'$, ossia $\delta = \delta' \cos p - \frac{\text{sen}\,p \cos a'}{\text{sen}\,a'}\delta'$.

Ora a motivo di $\text{sen}\,p = \text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,a'$, trascurando nel secondo membro le quantità di quarto ordine, avremo

$$\delta = \delta' - \pi\,\delta' \cos a' \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Moltiplicando questa equazione per A, ed osservando che $\pi = A\,\delta$,

otterremo . . . $\pi = \frac{A\,\delta'}{1 + A\,\delta' \cos a'} = A\,\delta' - (A\,\delta')^2 \cos a'$ . . . (2)

dalla quale equazione deducesi la paralasse orizzontale, quando siasi osservato il semidiametro apparente δ', e d'altronde conoscasi il rapporto A.

165. L'equazione (1) ci dà ancora

$\delta' = \frac{\delta}{1 - \pi \cos a'} = \delta + \pi\,\delta \cos a' + \text{ec.}$, donde rilevasi, che l'aumento del semidiametro lunare inalzandosi la Luna sopra l'orizzonte è sempre una quantità piccolissima di secondo ordine rapporto a π e δ.

Se si suppone la Luna all'orizzonte, sarà $a' = 90°$, e perciò $\delta' = \delta$. Quindi trascurando le quantità piccolissime di terzo ordine, il diametro orizzontale della Luna è uguale al diametro vero veduto dal centro della terra; per questa ragione sogliono ancora gli Astronomi dare a questo il nome di *diametro orizzontale*. La differenza può ascendere a $0'',3$, come facilmente rilevasi dall'equazione

$\delta = \frac{\text{sen}\,(a' - p)}{\text{sen}\,a'}\delta'$, che nel nostro caso diviene $\delta = \delta' \cos \pi$.

166. Passiamo ora ad esporre i metodi, che devonsi porre in opera per determinare la paralasse orizzontale ad un tempo qualunque, e quindi, mediante l'osservazione diretta di δ' per quello stesso momento, troveremo il valore di A. Esporremo due diversi metodi in questa ricerca, il primo dei quali può sempre porsi in opera da un solo osservatore, ed il secondo richiede due osservatori lontanissimi, e situati sotto lo stesso meridiano terrestre.

Metodo I. Siansi osservate le AR e le declinazioni del centro della Luna nel meridiano per quattro o cinque giorni consecutivi, e siasi in uno di essi (per es. nel primo giorno) osservata eziandio la distanza apparente della Luna dal zenit, quando era in una piccola altezza sopra l'orizzonte. Supponiamo inoltre, che tanto le distanze dal zenit osservate nel meridiano, quanto quest'ultima siano state corrette dall'effetto della rifrazione, cosicchè contengano il solo effetto della paralasse. Domandasi la paralasse orizzontale per il momento dell'osservazione fatta fuori del meridiano nel primo giorno.

Corrispondano le osservazioni della Luna nel meridiano ai tempi siderali t, t', t'', t'''; le AR della Luna, ossia i tempi ridotti in gradi siano $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$; le declinazioni osservate nel meridiano contenenti la paralasse $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$. Egli è evidente, che saranno le AR osservate libere dall' effetto della paralasse, perchè nel meridiano (essendo questo perpendicolare all' equatore ed all' orizzonte) la paralasse si fa tutta in altezza, ed il suo effetto non altera che le sole declinazioni, le quali saranno minori delle vere di una quantità uguale alla paralasse di altezza competente alla distanza apparente $L - \delta$ della Luna dal zenit, L essendo la latitudine dell' osservatore.

(*Fig.* 33) Posto ciò, sia HZR il meridiano, Z il zenit, P il polo dell' equatore, HOR l' orizzonte razionale dell' osservatore. Siasi nel primo giorno osservato la Luna in l nelle vicinanze dell' orizzonte ad un tempo siderale τ. Col mezzo dell' interpolazione, dalle osservazioni fatte in questo e nei successivi giorni al meridiano si deduca per questo tempo τ l'AR vera della Luna, che porremo $= a$, e la declinazione affetta dalla paralasse d' altezza nel meridiano, che indicheremo per d. Se indicheremo per p' la paralasse d' altezza corrispondente alla distanza $L - d$, la declinazione vera sarà $= d + p'$. Sia per lo stesso tempo L il luogo vero incognito della Luna nel suo verticale. Sarà ZPL l' angolo orario della Luna $= 15\,\tau - a$; dovendo questo sempre uguagliare l' arco di equatore fra il meridiano ed il circolo di declinazione che passa per il luogo vero dell' astro. Pongasi ora $ZP = 90 - L$; la distanza apparente della Luna dal zenit $Zl = Z'$; la sua distanza vera $ZL = Z$; la distanza vera della Luna dal polo $PL = 90 - d - p'$; l' angolo orario $ZPL = 15\,\tau - a = P$; la paralasse orizzontale al tempo τ sia $= \pi$; la paralasse di altezza $Ll = p$.

Avremo $p = Z' - Z = \pi \operatorname{sen} Z'$; quindi $\pi = \dfrac{Z' - Z}{\operatorname{sen} Z'}$ . . . (1)

e tutta la difficoltà è ricondotta a determinare il valore di Z che entra nel numeratore.

Il triangolo ZPL dà

$\cos Z = \operatorname{sen} L \operatorname{sen} (d + p') + \cos L \cos (d + p') \cos P$, la quale equazione, trascurando le terze potenze di p', si riduce alla seguente

$$\cos Z = \operatorname{sen} L \operatorname{sen} d + \cos L \cos d \cos P + p' (\operatorname{sen} L \cos d - \operatorname{sen} d \cos L \cos P) - \tfrac{1}{2} p'^2 (\operatorname{sen} L \operatorname{sen} d + \cos L \cos d \cos P).$$

Pongasi ora $\operatorname{sen} L \operatorname{sen} d + \cos L \cos d \cos P = \cos z$, sarà z noto, e poco diverso da Z. In seguito facciasi
$\operatorname{sen} L \cos d - \operatorname{sen} d \cos L \cos P = A$; $A - \tfrac{1}{2} p' \cos z = B$. Avremo $\cos Z = \cos z + B p'$. Ora osservando che si ha $p' = \pi \operatorname{sen} (L - d)$, la precedente equazione tosto si riduce alla seguente

$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(z - Z) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z + z) = B \pi \operatorname{sen}(L - d)$, e trascurando le terze potenze di $\frac{1}{2}(Z - z)$, avremo $Z = z - \frac{B \pi \operatorname{sen}(L - d)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z + z)}$. Sostituendo questo valore di Z nell'equazione (1), e ricavandone il valore di π, otterremo $\pi = (Z' - z) : \left(\operatorname{sen} Z - \frac{B \operatorname{sen}(L - d)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z + z)}\right)$, ovvero, riponendo per B il suo valore

$$\pi = \frac{Z' - z}{\operatorname{sen} Z' - \frac{\operatorname{sen}(L-d)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z+z)}\left(\operatorname{sen} L \cos d - \operatorname{sen} d \cos L \cos P - \frac{\pi \operatorname{sen}(L-d) \cos z}{2}\right)}$$

Per dedurre da questa equazione il valore di π, si calcolerà z; quindi nel denominatore si assumerà $Z = z$, e trascurando il termine moltiplicato per π, si troverà un primo valore di π, mediante il quale si calcolerà il valore di Z, e si sostituirà poi da capo nel denominatore, tenendo ora conto eziandio del termine moltiplicato per π. Si otterrà in tal guisa un valore di π più approssimato del precedente, a cui con un terzo calcolo non si troverà quasi mai nulla da aggiungere.

167. *Metodo II.* Suppone questo secondo metodo due osservatori molto fra loro distanti, e situati sotto uno stesso meridiano terrestre, i quali osservino la Luna, o quell'astro di cui vuolsi determinare la paralasse orizzontale al momento, in cui esso passa per il comune meridiano, e lo riferiscano ad una stessa stella fissa nel modo seguente.

(*Fig.* 34) Siano A, B due luoghi situati sotto lo stesso meridiano, come sono Berlino ed il Capo di Buona Speranza, o meglio ancora Stockolm ed il Capo di Buona Speranza. Z, Z' i loro zenit situati in uno stesso meridiano celeste. L'osservatore in A riferirà la Luna L nel meridiano al punto m del cielo stellato, mentre l'osservatore in B la riferisce al punto n; veduta in vece dal centro della terra sarebbe riferita al punto r.

Per determinare comodamente $m n$ mediante l'osservazione, si osservino non solo le distanze della Luna dal zenit, ma ancora le distanze di una stessa stella S dal zenit. Ponghansi le distanze osservate $Z m = h$, $Z' n = h'$, $Z S = a$, $Z' S = a'$; sarà $m S = h - a$, $n S = a' - h'$, e però $m n = h + h' - (a + a') = M$.

Ora essendo $m n$ la somma delle paralassi di altezza dell'astro in L pei due osservatori A, B, egli è evidente che chiamando per questo medesimo istante ω la paralasse equatoriale, r ed r' i raggi $A C$, $C B$ della terra, le paralassi orizzontali in A e B saranno ωr, $\omega r'$, come sopra si è dimostrato. La paralasse di altezza per l'osservatore in A sarà $= \omega r \operatorname{sen} h$; per l'osservatore in $B = \omega r' \operatorname{sen} h'$. Quindi

la loro somma $m\,n = M = \omega\,(r \text{ sen } h + r' \text{ sen } h')$, donde rilevasi
$\omega = \dfrac{M}{r \text{ sen } h + r' \text{ sen } h'}$ (*).

Conosciuta così con l'osservazione la paralasse equatoriale, si formeranno tosto le paralassi orizzontali $\omega\,r$, $\omega\,r'$ per i due luoghi A, B. Se poi al tempo stesso i due osservatori avranno osservato il diametro apparente della Luna, si potrà con molta facilità dedurre il rapporto che passa fra la paralasse orizzontale, ed il diametro orizzontale della Luna, od anche fra la paralasse equatoriale ed il semidiametro orizzontale giusta i precetti del § 163, e quindi dall'osservazione dei diametri si potrà dedurre ad ogni istante la paralasse dell'astro.

168. *Scolio I.* Le paralassi determinate mediante l'osservazione con taluno dei metodi precedenti variano per la Luna da 53′ 51″ fino a 61′ 29″. Quindi la sua distanza dal centro della terra varia fra 63,8419 e 55,9164 semidiametri terrestri. La distanza media della Luna dal centro della terra sarà adunque 59,87915, ossia prossimamente 60 semidiametri terrestri.

Sopra al § 162 chiamando g il raggio del globo lunare espresso in semidiametri terrestri, abbiamo trovato $g = d\,\delta$ (δ il semidiametro orizzontale della Luna). Ma è $d = \dfrac{1}{\text{sen } \pi}$, $\delta = \dfrac{\pi}{A} = \dfrac{\text{sen } \pi}{A}$; quindi avremo $g = \dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{3,6641} = \dfrac{3}{11}$ circa.

Essendo poi i volumi dei globi come i cubi dei loro raggi, sarà il globo lunare $\dfrac{27}{1331}$ del globo terrestre, cioè sarà la Luna circa 49 volte minore della terra nostra.

169. *Scolio II.* Il metodo secondo sopra esposto suppone che i due luoghi A, B siano precisamente sotto lo stesso meridiano. Se non ci fossero che prossimamente, si osserverà in uno dei luoghi, p. es. A, la distanza dell'astro dal zenit per due o tre giorni consecutivi; quindi conosciuta in tempo la differenza dei meridiani, dal moto in declinazione rilevato dalle osservazioni si calcolerà con una facile interpolazione qual esser deve la distanza dell'astro dal zenit sotto il meridiano che passa per B in una latitudine uguale a quella del luogo A. Quest'ultima distanza calcolata sarà quella che si dovrà prendere per h. Con questo metodo potranno fra loro confrontarsi le osservazioni fatte in meridiani molto distanti, massime se il moto diurno degli astri osservati in declinazione sia regolare.

(*) Abbiamo supposto i due osservatori da una parte e dall'altra dell'equatore; se fossero nello stesso emisfero si dovrebbe scrivere $r \text{ sen } h - r' \text{ sen } h'$ in luogo di $r \text{ sen } h + r' \text{ sen } h'$.

170. *Esempio*. Nel 1751 li 25 d'Ottobre essendo il celebre astronomo la Caille al Capo di Buona Speranza osservò Venere distante dal zenit di 12° 21', ed il suo lembo settentrionale era più australe del paralello di b dell'Aquario di 7' 26",2. Nella stessa sera a Greenwich Bradley osservò lo stesso lembo di Venere nel suo passaggio pel meridiano distante dal medesimo paralello verso mezzodì di 7' 15",3, e la sua distanza dal zenit era = 73° 0'. La differenza dei due meridiani in tempo è = 1^h 14', essendo Greenwich più all'occidente. Bradley osservò ancora, che nell'intervallo di 23^h 54' (differenza di due passaggi consecutivi al meridiano) Venere si trasportava a settentrione di 17' 25",0; onde deducesi che in 1^h 14' il suo moto in declinazione fu di 53",9. Ora l'osservazione di Greenwich era fatta 1^h 14' dopo quella del Capo di Buona Speranza. Dunque all'epoca di questa medesima osservazione essa, sotto il paralello di Greenwich, era distante dal paralello di b ♒ di 7' 15",3 + 53",9 verso mezzodì, ossia 8' 9",2, e la distanza di Venere dal zenit sarebbesi al tempo stesso trovata = 73°, 1'. Quindi l'arco mn = 8' 9",2 — 7' 26",2 = 43",0. Supposta adunque la terra sferica, era allora la paralasse orizzontale di Venere $= \frac{43'',0}{\text{sen } 12° 21' + \text{sen } 73° 1'} = 36'',74$.

Osservata la paralasse orizzontale π, sarà la distanza d del pianeta dalla terra espressa per semidiametri terrestri $= \frac{r}{\text{sen } \pi}$. Che se vorrassi espressa in parti della distanza media della terra dal Sole, come praticare sogliono gli Astronomi, chiamata questa q avremo $r = q \text{ sen } 8'',8$, e quindi $d = \frac{\text{sen } 8'',8}{\text{sen } \pi} q = \frac{8'',8}{\pi} q$. E posto $q = 1$, sarà $d = \frac{8'',8}{\pi}$. Nel nostro esempio la distanza di Venere dalla terra troverebbesi = 0,2395 nell'ipotesi di $q = 1$.

Formule per calcolare l'effetto della paralasse nelle AR *e declinazioni, come anche nelle longitudini e latitudini.*

171. Appellasi *paralasse in AR* la differenza dell'*AR* di un astro veduta dal centro della terra e dalla sua superficie; così pure la paralasse in *declinazione*, in *longitudine* ec. è la differenza fra le due corrispondenti quantità vedute dal centro della terra e dalla sua superficie. Ricerchiamo l'espressione di questi effetti particolari della paralasse.

Per giungere a formule generali, e nel modo più facile, riferiremo tanto la posizione della Luna, come anche dell'osservatore a coordinate rettangole nel modo seguente.

(*Fig.* 35) Sia C il centro della terra; C' il luogo dell'osservatore

alla sua superficie; L il luogo vero della Luna nello spazio, e rappresenti il piano della tavola condotto per C il piano dell'equatore. $C\Upsilon$ la linea dell'equinozio di primavera; CB una linea ad essa perpendicolare nel piano stesso dell'equatore. Per il punto C' conducasi un piano paralello al piano $BC\Upsilon$, che prolunghisi fino al cielo stellato, e rappresenterà esso l'equatore celeste apparente, il quale nel cielo stellato situato ad una distanza infinita, sembrerà coincidere coll'equatore vero.

Posto ciò, dal luogo della Luna L si conduca una perpendicolare LM sul piano del vero equatore $BC\Upsilon$, che taglierà l'equatore apparente in M'. Dai punti M, M' si conducano le perpendicolari MP, $M'P'$ sulle linee $C\Upsilon$, $C'\Upsilon'$, e pongasi $CP=x$; $PM=y$; $ML=z$; $C'P'=x'$; $M'P'=y'$; $M'L=z'$. Avendo poi condotto le linee CM, $C'M'$, CL, $C'L$, pongasi $PCM=AR$ vera di Luna $=\alpha$; $LCM=$ declinaz. vera di Luna $=\delta$; $LC=d$; $P'C'M'=AR$ appar. di ☽ $=\alpha'$; $M'C'L=$ declinaz. appar. di ☽ $=\delta'$; $LC'=d'$; $CC'=r$. Avremo evidentemente $x=d\cos\alpha\cos\delta$; $y=d\,\text{sen}\,\alpha\cos\delta$; $z=d\,\text{sen}\,\delta$; $x'=d'\cos\alpha'\cos\delta'$; $y'=d'\,\text{sen}\,\alpha'\cos\delta'$; $z'=d'\,\text{sen}\,\delta'$. Dalle ultime tre equazioni ricaveremo

$$\text{tang}\,\alpha'=\frac{y'}{x'};\quad \text{tang}\,\delta'=\frac{z'}{x'}\cos\alpha'=\frac{z'}{y'}\,\text{sen}\,\alpha';\quad d'=\frac{z'}{\text{sen}\,\delta'}.$$

S'indichino ora le coordinate del punto C' rapporto all'equatore vero per X, Y, Z, si avrà dalla Geometria $x'=x-X$, $y'=y-Y$, $z'=z-Z$. Sostituiti questi valori in quelli di tang α', tang δ', d', avremo

$$(1)\ \text{tang}\,\alpha'=\frac{y-Y}{x-X};\quad (2)\ \text{tang}\,\delta'=\frac{z-Z}{x-X}\cos\alpha'=\frac{z-Z}{y-Y}\,\text{sen}\,\alpha';$$

$$(3)\ d'=\frac{z-Z}{\text{sen}\,\delta'}.$$

Non resta ora che a determinare i valori di X, Y, Z relativi al luogo dell'osservatore. (*Fig.* 36) A tale oggetto rappresenti C il centro della terra; $C'AD$ il meridiano terrestre del luogo che passa per C'; $RC\Upsilon$ il piano dell'equatore tagliato ad angolo retto dal meridiano lungo la linea CA; R sia il punto dell'equatore celeste, che si trova nel meridiano, e la cui distanza dall'equinozio è $=R\Upsilon=RC\Upsilon$. Quest'arco $R\Upsilon$ è il tempo sidereo corrispondente all'istante, per cui si calcola, ridotto in gradi, ossia l'AR del punto culminante; $C'CA$, ossia ZR è la latitudine geografica dell'osservatore, se la terra considerar si vuole come sferica. Se poi considerare si vuole come sferoidica, l'angolo $C'CA$ è la latitudine diminuita dell'angolo che fa la verticale col raggio terrestre, che per brevità appelleremo *angolo della verticale*. Questo varia per ogni latitudine, e trovasi ridotto in

tavole fra le tavole lunari. Noi trattando della figura della terra nel secondo volume daremo le formule per calcolarlo.

Posto $C'CA = L$, $RC\Upsilon = \theta$, condotta $C'M$ perpendicolare alla superficie dell'equatore, e quindi anche a CA, e dal punto M condotta MP perpendicolare alla linea degli equinozj, sarà $CP = X$, $PM = Y$, $C'M = Z$, $CC' = r$. Quindi $X = r \cos L \cos \theta$, $Y = r \cos L \operatorname{sen} \theta$, $Z = r \operatorname{sen} \theta$. Scrivendo ora nelle equazioni (1), (2), (3) i valori di X, Y, Z, x, y, z dividendo numeratore e denominatore per d, e ponendo $\frac{r}{d} = \pi =$ sen di paral. orizz., otterremo

$$(1)\ \operatorname{tang} \alpha' = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \delta - \pi \cos L \operatorname{sen} \theta}{\cos \alpha \cos \delta - \pi \cos L \cos \theta};$$

$$(2)\ \operatorname{tang} \delta' = \frac{\operatorname{sen} \delta - \pi \operatorname{sen} L}{\cos \alpha \cos \delta - \pi \cos L \cos \theta} \cos \alpha' = \frac{\operatorname{sen} \delta - \pi \operatorname{sen} L}{\operatorname{sen} \alpha \cos \delta - \pi \operatorname{sen} \theta \cos L} \operatorname{sen} \alpha';$$

$$(3)\ d' = d \frac{(\operatorname{sen} \delta - \pi \operatorname{sen} L)}{\operatorname{sen} \delta'}.$$

172. L'equazione (1) colle convenienti riduzioni darà

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \delta - \pi \operatorname{sen} \theta \cos L}{\sqrt{\{\cos^2 \delta - 2\pi \cos L \cos \delta \cos (\alpha - \theta) + \pi^2 \cos^2 L\}}};$$

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha \cos \delta - \pi \cos L \cos \theta}{\sqrt{\{\cos^2 \delta - 2\pi \cos L \cos \delta \cos (\alpha - \theta) + \pi^2 \cos^2 L\}}};$$

valori che sostituiti nella seconda equazione danno

$$\operatorname{tang} \delta' = \frac{\operatorname{sen} \delta - \pi \operatorname{sen} L}{\sqrt{\{\cos^2 \delta - 2\pi \cos L \cos \delta \cos (\alpha - \theta) + \pi^2 \cos^2 L\}}};$$

quindi si deduce

$$\operatorname{sen} \delta' = \frac{\operatorname{sen} \delta - \pi \operatorname{sen} L}{\sqrt{\{1 - 2\pi [\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} L + \cos \delta \cos L \cos (\alpha - \theta)] + \pi^2\}}};$$

ed introducendo questo valore nella terza equazione, otterremo

$$d' = d \sqrt{\{1 - 2\pi [\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} L + \cos \delta \cos L \cos (\alpha - \theta)] + \pi^2\}}.$$

173. I precedenti valori di d' e di sen δ' somministrano un mezzo molto comodo per calcolare il semidiametro apparente della Luna in un'altezza qualunque sopra l'orizzonte, e la paralasse in declinazione. In fatti chiamando Δ, Δ' il semidiametro vero ed apparente della Luna per un istante qualunque, si ha (§ 163) $\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{d}{d'}$, perciò

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{\{1 - 2\pi [\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} L + \cos \delta \cos L \cos (\alpha - \theta)] + \pi^2\}}}.$$

Se per brevità pongasi il secondo membro di questa equazione $= 1 + s$ avremo . . . $\Delta' = \Delta (1 + s)$ . . . (a)

Introducendo nel valore di sen δ' la quantità $1+s$, avremo sen $\delta' = (1+s)$ sen $\delta - \pi$ sen $L\,(1+s)$, e quindi sen δ' — sen $\delta = s$ sen $\delta - \pi$ sen $L\,(1+s)$.

Se si vorranno trascurare le terze potenze di $\delta' - \delta$, di π e di s, le quali saranno il più delle volte piccolissime, avremo

$$\delta' = \delta + \frac{s \operatorname{sen} \delta - \pi \operatorname{sen} L\,(1+s)}{\cos \tfrac{1}{2}(\delta + \delta')} \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

donde si otterrà con molta speditezza la declinazione apparente δ', data essendo la posizione vera della Luna.

La quantità s, che entra nelle equazioni (a), (b) si potrà direttamente ottenere dall' equazione

$s = \{1 - 2\,\pi\,[\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen} L + \cos\delta \cos L \cos(\alpha - \theta)] + \pi^2\}^{-\frac{1}{2}} - 1$

la quale svolta in serie, ponendo per brevità

$N =$ sen δ sen L + cos δ cos L cos $(\alpha - \theta)$, darà

$$s = \pi N - \tfrac{1}{2}\pi^2\,(1 - 3\,N^2) \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

ove si può osservare che la quantità N (supposta sferica la figura della terra) è il coseno della distanza dell' astro dal zenit.

174. Se nelle formule del § 172 poniamo il denominatore di sen α' e di cos $\alpha' = Q$, otterremo, tolte le frazioni

$Q \operatorname{sen}\alpha' = \operatorname{sen}\alpha \cos\delta - \pi \operatorname{sen}\theta \cos L$; $Q \cos\alpha' = \cos\alpha \cos\delta - \pi \cos\theta \cos L$;

dalle quali deduccsi

$Q \operatorname{sen}(\alpha' - \alpha) = \pi \cos L \operatorname{sen}(\alpha - \theta)$; $Q \cos(\alpha' - \alpha) = \cos\delta - \pi \cos L \cos(\alpha - \theta)$;

e quindi . . . $\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \dfrac{\pi \cos L \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{\cos\delta - \pi \cos L \cos(\alpha - \theta)}$ . . . (d)

la quale ci darà con molta speditezza l'effetto della paralasse in AR.

Si può ottenere dall' equazione (d) una serie molto convergente per la paralasse in AR, la quale trascurando al solito le quantità di terzo ordine, si riduce alla seguente (fingendo π ridotto in secondi)

$$\alpha' - \alpha = \frac{\pi \cos L}{\cos \delta} \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \left(\frac{\pi \cos L}{\cos \delta}\right)^2 \frac{\operatorname{sen} 2\,(\alpha - \theta)}{2\,R''},$$

che con vantaggio potrà sostituirsi alla formula (d).

175. Cogli stessi ragionamenti si otterranno le formule opportune per determinare la posizione apparente della Luna rapporto all' ecclittica. Anzi si potranno esse dedurre dalle precedenti cambiando l'AR e declinazione della Luna nella sua longitudine e latitudine; e le quantità θ e L che rappresentano l'AR e declinazione del zenit (o di quel punto, che gli viene sostituito quando la terra è sferoidica) si cangieranno nella longitudine e latitudine del zenit. Se pertanto l, l', λ, λ' rappresentano le longitudini vera ed apparente, e le latitudini vera ed apparente della Luna; g la longitudine del zenit, h la sua latitudine, otterremo Δ', λ', l' mediante le seguenti formule

$$(1)\quad 1 + s = \{1 - 2\pi[\text{sen}\, h\, \text{sen}\, \lambda + \cos h \cos \lambda \cos (l - g)] + \pi^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$(2)\quad \Delta' = \Delta (1 + s); \qquad (3)\quad \lambda' = \lambda + \frac{s\, \text{sen}\, \lambda - \pi (1 + s)\, \text{sen}\, h}{\cos \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')};$$

$$(4)\quad l' = l + \frac{\pi \cos h}{\cos \lambda}\, \text{sen}\, (l - g) + \left(\frac{\pi \cos h}{\cos \lambda}\right)^2 \frac{\text{sen}\, 2\, (l - g)}{2\, R''}.$$

La prima di queste formule è la più complicata a calcolarsi in numeri. Essa si può per altro svolgere in serie, e trascurando le quantità di terzo ordine, ponendo per brevità
$N = \text{sen}\, h\, \text{sen}\, \lambda + \cos h \cos \lambda \cos (l - g) = \cos$ dist. di ☽ dal zenit, si ottiene $s = \pi N - \frac{1}{2}\pi^2 (1 - 3 N^2)$.

Riguardando λ, ossia la latitudine della Luna come quantità di primo ordine, lo che è quasi sempre permesso, non eccedendo essa nel suo massimo valore 6°, le formule precedenti si rendono un poco più semplici, poichè nel secondo membro dell' equazione terza si può porre $\lambda' = \lambda$, e nel valore di s basta soltanto ritenere il primo termine. Questa supposizione è sempre permessa nel calcolo degli ecclissi solari.

176. I valori di sen α', cos α', tang α', sen δ', tang δ' dati nel § 172 cogli stessi cambiamenti danno gli esatti rapporti fra la posizione apparente, e la posizione vera della Luna relativamente all' ecclittica. Gioverà qui esporli per comodo

$$\text{sen}\, l' = \frac{\text{sen}\, l \cos \lambda - \pi\, \text{sen}\, g \cos h}{\sqrt{\{\cos^2 \lambda - 2\pi \cos \lambda \cos h \cos (l - g) + \pi^2 \cos^2 h\}}} \quad . \quad (1)$$

$$\cos l' = \frac{\cos l \cos \lambda - \pi \cos g \cos h}{\sqrt{\{\cos^2 \lambda - 2\pi \cos \lambda \cos h \cos (l - g) + \pi^2 \cos^2 h\}}} \quad . \quad (2)$$

$$\text{tang}\, \lambda' = \frac{\text{sen}\, \lambda - \pi\, \text{sen}\, h}{\sqrt{\{\cos^2 \lambda - 2\pi \cos \lambda \cos h \cos (l - g) + \pi^2 \cos^2 h\}}} \quad . \quad (3)$$

$$\text{sen}\, \lambda' = \frac{\text{sen}\, \lambda - \pi\, \text{sen}\, h}{\sqrt{\{1 - 2\pi[\text{sen}\, \lambda\, \text{sen}\, h + \cos \lambda \cos h \cos (l - g)] + \pi^2\}}} \quad . \quad (4)$$

$$\text{tang}\, (l' - l) = \frac{\pi \cos h\, \text{sen}\, (l - g)}{\cos \lambda - \pi \cos h \cos (l - g)}.$$

Le quantità g, h sono dette volgarmente dagli Astronomi *longitudine e latitudine del nonagesimo*. Non essendo altro che la longitudine e la latitudine corrispondenti ad un' AR determinata $= \theta$, e ad una declinazione $= L$ dovranno esse calcolarsi mediante i precetti del problema II capitolo IV, al quale oggetto comodissime sono per il calcolo logaritmico le formule (a'), (b'), (c') dello scolio II.

Le formule degli articoli precedenti sono quelle stesse che furono

da me date nella prefazione alle tavole del nonagesimo per l'Osservatorio di Padova pubblicate nel 1807.

177. Le equazioni (1), (2), (3), (4) del § precedente danno la posizione apparente della Luna per mezzo della sua posizione vera. Occorre talvolta di avere la posizione vera data per l'apparente osservata. Si determineranno in tal caso le paralassi in longitudine e latitudine coi seguenti precetti. Si chiami per brevità P il denominatore delle equazioni (1), (2); esse si potranno scrivere sotto la forma
$P \operatorname{sen} l' = \operatorname{sen} l \cos \lambda - \pi \operatorname{sen} g \cos h$; $P \cos l' = \cos l \cos \lambda - \pi \cos g \cos h$, dalle quali eliminando P, si ottiene $\cos \lambda \operatorname{sen} (l' - l) = \pi \cos h \operatorname{sen} (l' - g)$. Questa equazione, trascurando i termini di terzo ordine, dà la paralasse in longitudine . . . $l' - l = \dfrac{\pi \cos h \operatorname{sen} (l' - g)}{\cos \lambda}$ . . . (a)

L'equazione (3), ponendo per brevità $Q = \sqrt{(1 - 2 \pi N + \pi^2)}$ porge $Q \cos \lambda' = P$, e questa combinata con le due superiori dà le due seguenti: $Q \cos \lambda' \operatorname{sen} l' = \operatorname{sen} l \cos \lambda - \pi \operatorname{sen} g \cos h$;
$Q \cos \lambda' \cos l' = \cos l \cos \lambda - \pi \cos g \cos h$. Moltiplicando la prima di queste per $\operatorname{sen} l'$, la seconda per $\cos l'$, e sommando i prodotti si ottiene $Q \cos \lambda' = \cos \lambda \cos (l' - l) - \pi \cos h \cos (l' - g)$. La quarta equazione dà $Q \operatorname{sen} \lambda' = \operatorname{sen} \lambda - \pi \operatorname{sen} h$. Finalmente da queste due eliminando Q si ottiene [osservando che $\cos (l' - l) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(l' - l)$]
$\operatorname{sen}(\lambda' - \lambda) = -\pi \cos \lambda' \operatorname{sen} h + \pi \operatorname{sen} \lambda' \cos h \cos(l' - g) + 2 \operatorname{sen} \lambda' \cos \lambda \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(l' - l)$, la quale in virtù dell'equazione (a), trascurando i termini di terzo ordine, facilmente si cangia nella seguente

$$(b)\quad \lambda' - \lambda = -\pi \cos \lambda' \operatorname{sen} h + \pi \operatorname{sen} \lambda' \cos h \cos(l' - g) + \frac{\pi^2 \operatorname{tang} \lambda' \cos^2 h \operatorname{sen}^2 (l' - g)}{2 R''}.$$

Mediante quest'ultima equazione si calcolerà prima il valore di λ, poi dall'equazione (a) si dedurrà il valore di l.

CAPITOLO XIV.

Degli ecclissi e delle occultazioni.

Ecclissi di Luna.

178. **A**ccadono gli ecclissi della Luna quando essa è in opposizione col Sole rapporto alla terra, ossia quando trovasi nei suoi pleniluni, e nel tempo stesso tanto vicina ai nodi, che la sua latitudine risulti minore del raggio del cono ombroso, che la terra lascia dietro di se aumentato del semidiametro lunare.

(*Fig.* 37) Rappresenti S il centro del Sole AA'; T il centro della terra BB' per il medesimo istante di tempo. Gli estremi raggi

solari AB, $A'B'$ determinano con la loro direzione la posizione e la grandezza del cono ombroso BCB', il di cui asse STC è sempre situato nel piano dell'ecclittica.

Sia LL' una porzione dell'orbita lunare situata verso la sua opposizione col Sole. Conviene immaginarsi questa porzione LL' elevata sopra il piano dell'ecclittica, e situata in un piano a quello inclinato di circa 5 gradi. Se verso il punto H del plenilunio la latitudine della Luna è minore del raggio della sezione del cono ombroso e del suo semidiametro, è forza che essa o in tutto, o in parte s'immerga nell'ombra terrestre, e quindi allora avrà luogo l'ecclisse o totale, o parziale.

179. Determiniamo prima di tutto il raggio della sezione del cono ombroso. Se L (*Fig.* 37) rappresenta il punto in cui la Luna principia ad immergersi nel cono ombroso della terra, sarà il raggio della sezione del cono ombroso veduto sotto l'angolo LTH. Ora è evidente essere $LTH = TLB - LCT$. Frattanto per T condotta TF paralella ad ABC, sarà $STF = LCT$. A motivo della piccolezza di STF, potremo riguardarlo come uguale al suo seno, e quindi avremo $STF = \frac{SF}{ST} = \frac{SA}{ST} - \frac{TB}{ST}$; ma $\frac{SA}{ST}$ = semidiametro apparente di Sole; $\frac{TB}{ST}$ = paralasse orizzontale di Sole; quindi se porremo il semidiametro apparente del Sole $= d$, la paralasse orizzontale del Sole $= p$, e l'angolo TLB che rappresenta la paralasse orizzontale della Luna $= \pi$, l'angolo della sezione del cono ombroso $= R$, avremo $R = \pi + p - d$, cioè sarà sempre la sezione del cono ombroso della terra alla regione della Luna uguale alla somma delle paralassi del Sole e della Luna diminuita del semidiametro solare.

Scolio. Tale appunto sarebbe la misura della sezione del cono ombroso della terra, se attorno al verace cono ombroso non rimanesse in grazia dell'atmosfera terrestre una forte penombra, in virtù della quale la luce della Luna va gradatamente diminuendo, e sparisce anche prima che il lembo lunare abbia toccato il cono ombroso. In tal guisa la durata degli ecclissi è un poco più lunga che non sarebbe se fosse allontanata una tale penombra, e perciò, quando accordare si voglia il calcolo coll'osservazione, è forza aumentare l'ampiezza dell'ombra. Dietro l'esame di molte osservazioni ha luogo un passabile accordo fra il calcolo e l'osservazione, qualora si aumenti di $\frac{1}{60}$ la precedente quantità; così noi riterremo, che il valore di R sia dato dalla equazione . . . $R = \frac{61}{60}(\pi + p - d)$ . . . (1)

Posto ciò, passiamo alla soluzione del seguente

Problema. Determinare le circostanze tutte di un ecclisse di Luna.

180. Le cose principali che si desiderano in un ecclisse di Luna sono 1.° il tempo del suo principio e del suo fine; 2.° il tempo della massima oscurazione; 3.° la quantità ecclissata del disco lunare. Per trovare una dietro l'altra queste quantità noi supporremo di aver calcolato con le migliori tavole astronomiche:

1.° Il luogo del Sole al momento del plenilunio, ed il suo moto orario, che è sempre uguale al moto orario dell'asse del cono ombroso.

2.° La longitudine della Luna al momento dell'opposizione, ed il suo moto orario.

3.° La latitudine della Luna al momento dell'opposizione unitamente al suo moto orario in latitudine. Si supporrà positiva la latitudine boreale, negativa la latitudine australe. Parimente si riguarderà il moto orario in latitudine come positivo se tende ad avvicinare la Luna al polo boreale; negativo se tende ad avvicinarla al polo australe.

4.° Supporremo inoltre di aver calcolato la paralasse orizzontale della Luna e quella del Sole unitamente al semidiametro orizzontale della Luna e del Sole. Di più assumeremo costanti i moti orarj della Luna e del Sole, come eziandio le paralassi orizzontali, ed i semidiametri, giacchè quantunque variino effettivamente da un'ora all'altra, pure le loro variazioni sono sempre molto piccole, e si possono trascurare trattandosi di ecclissi di Luna, le osservazioni dei quali sono sempre molto indecise a causa della penombra dovuta all'atmosfera terrestre, e di un'altra specie di penombra, di cui parleremo qui sotto.

Posto ciò, cerchiamo la distanza della Luna all'asse del cono ombroso per un numero t di ore dopo il plenilunio.

Sia il moto orario della Luna in longitudine . . . . $= m$
il moto orario del Sole, che è sempre uguale a quello dell'asse del cono ombroso della terra . $= m'$
la latitudine della Luna in opposizione . . . . $= \lambda$
il suo moto orario . . . . $= n$

Dopo un numero t di ore la longitudine della Luna avrà aumentato di mt, e l'asse del cono ombroso si sarà trasportato verso oriente di $m't$. Quindi la Luna si sarà allontanata in longitudine dall'asse del cono ombroso di una quantità $= mt - m't$; la latitudine nell'istesso tempo avrà aumentato di nt, e sarà perciò $= \lambda + nt$.

(*Fig.* 38) Se pertanto, alla fine del tempo t dopo l'opposizione, T rappresenta il centro della sezione del cono ombroso fatta alla regione della Luna; $L'TC$ l'ecclittica, in cui sempre trovasi T; LL una porzione dell'orbita lunare, presa $TM = (m - m')t$, ed elevata

una perpendicolare LM, trovetassi la Luna nel punto L, e sarà perciò $LM = \lambda + nt$. Quindi posta la distanza LT del centro della Luna dall' asse del cono ombroso $= e$, avremo

$$e^2 = (\lambda + nt)^2 + (m - m')^2 t^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

la quale ordinata diviene $[(m - m')^2 + n^2]t^2 + 2\lambda n t = e^2 - \lambda^2$, e risoluta rapporto a t porge

$$t = \frac{-\lambda n \pm \sqrt{\{\lambda^2 n^2 + (e^2 - \lambda^2)[(m - m')^2 + n^2]\}}}{(m - m')^2 + n^2} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

L' equazione (1) ci dà la distanza del centro della Luna dall' asse del cono ombroso alla fine di t. L' equazione (2) ci somministra per lo contrario il tempo in cui la distanza e ha un determinato valore; ed è chiaro che il segno $+$ darà l' istante in cui ha luogo la distanza e dopo l' opposizione, ed il segno $-$ l' istante corrispondente alla stessa distanza avanti l' opposizione.

Si può dare all' equazione (2) ancora una forma più comoda. Infatti ponendo $\tan g\,\alpha = \frac{n}{m - m'}$ (donde si deduce

$\text{sen}^2 \alpha = \frac{n^2}{(m - m')^2 + n^2}$; $\cos^2 \alpha = \frac{(m - m')^2}{(m - m')^2 + n^2}$) essa diverrà

$$t = \frac{-\lambda\, \text{sen}^2 \alpha \pm \text{sen}\, \alpha \sqrt{(e^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha)}}{n} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Se facciamo $e = R + \delta$, ossia alla somma del raggio della sezione del cono ombroso, e del semidiametro orizzontale della Luna, avremo due valori di t che corrisponderanno al principio ed alla fine dell' ecclisse lunare. Supponiamo che l' opposizione o istante del plenilunio abbia avuto luogo ad un tempo noto T. Accaderà

il principio dell' ecclisse al tempo $T - \frac{\lambda\, \text{sen}^2 \alpha + \text{sen}\, \alpha \sqrt{(e^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha)}}{n}$

il fine poi avrà luogo al tempo . $T - \frac{\lambda\, \text{sen}^2 \alpha - \text{sen}\, \alpha \sqrt{(e^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha)}}{n}$

il mezzo dell' ecclisse avrà luogo nel tempo $T - \frac{\lambda\, \text{sen}^2 \alpha}{n}$

la durata dell' ecclisse sarà . . . $= \frac{2\, \text{sen}\, \alpha}{n} \sqrt{(e^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha)}$

ritenendo sempre $e = R + \delta$.

181. Si cerchi ora il momento della massima oscurazione. Egli è facile a vedere che per un tale momento la distanza dei centri e deve divenire la più piccola possibile. Ponendo pertanto l' equazione (3) sotto la forma $(nt + \lambda\, \text{sen}^2 \alpha)^2 = \text{sen}^2 \alpha\, (e^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha)$ per ottenere

il minimo valore si ponga $\frac{de}{dt} = 0$, ed avremo $nt + \lambda \operatorname{sen}^2 \alpha = 0$, la quale porge $t = -\frac{\lambda \operatorname{sen}^2 \alpha}{n}$; quindi la minima distanza sarà $e = \lambda \cos \alpha$. Il mezzo dell'ecclisse sarà pertanto anche quello della massima oscurazione.

Allorquando la distanza dei centri in generale è $= e$, la parte del disco lunare immersa nell'ombra è evidentemente $= R + \delta - e$. Quindi nella massima oscurazione la quantità ecclissata sarà $= R + \delta - \lambda \cos \alpha$.

Sogliono gli Astronomi valutare l'ecclisse per digiti, appellandosi *digito* il dodicesimo del diametro lunare, ossia il sesto del raggio. Quindi nella massima oscurazione il numero dei digiti ecclissati sarà $= 6 \frac{(R + \delta - \lambda \cos \alpha)}{\delta}$.

Tali sono le formule generali, dalle quali dipendono le circostanze tutte dell'ecclisse. Da esse risultano i seguenti corollari.

Coroll. I. Se posto $e = R + \delta$ risulteranno immaginarj i due valori di t dati dall'equazione (3), non vi sarà ecclisse. Quindi perchè essa abbia luogo fa duopo che sia $R + \delta > \lambda \cos \alpha$.

Coroll. II. L'ecclisse si convertirà in un semplice contatto se $R + \delta = \lambda \cos \alpha$; e l'ecclisse sarà totale se $R + \delta - \lambda \cos \alpha > 2\delta$.

182. *Scolio.* (*Fig.* 37) Avvicinandosi la Luna al cono ombroso della terra, non perde la sua luce tutto ad un tratto, ma si va gradatamente oscurando, e tanto più, quanto più ad esso va avvicinandosi, e per una ragione contraria gradatamente va riacquistando la sua luce, quando sorte dal cono ombroso della terra, donde accade che incertissimi risultano il principio ed il fine dell'ecclisse lunare. Una tale incertezza si deve in gran parte ripetere dalla poca diafaneità degli strati atmosferici circonvicini alla nostra terra, la quale è causa che molti raggi solari vadano perduti; ma più ancora da una certa penombra, che avrebbe luogo anche non supponendo la terra circondata dall'atmosfera, di cui ora parleremo.

Si conduca una linea GXY tangente al globo solare ed al globo terrestre, come la *figura* 37 la rappresenta. È chiaro che un osservatore, il quale fosse posto dentro l'angolo YQL non vedrebbe la parte inferiore del Sole, e della parte superiore tanto meno ne sarebbe a lui visibile, quanto più alla tangente ABL si andrebbe avvicinando. Andrà pertanto successivamente la luce mancando dentro l'angolo YQL, e perciò la Luna perderà gradatamente il suo splendore avvicinandosi al vero cono ombroso nell'attraversare questa penombra; la sua ampiezza è $= AQG$, ossia al diametro del Sole. Sarà pertanto

il raggio della sezione dell'ombra e della penombra $= \pi + p + d$, essendo quello dell'ombra vera, come sopra mostrammo $= \pi + p - d$.

Usi degli ecclissi lunari nella ricerca delle longitudini geografiche.

183. Allorquando la Luna incomincia ad immergersi nell'ombra terrestre perde la sua luce per tutti gli abitatori della terra che la vedono sul loro orizzonte. Se pertanto c'immaginiamo due osservatori sotto due diversi meridiani, i quali notino il principio dell'ecclisse, la differenza dei tempi che si osserverà nei loro orologi ridotta in gradi a ragione di 15° per ogni ora, esprimerà l'angolo compreso nel polo terrestre fra i loro rispettivi meridiani.

(*Fig.* 39) Rappresenti in fatti $QPEp$ il globo terracqueo, che si suppone concentrico alla sfera celeste; A e B siano le posizioni di due osservatori sotto i due meridiani PAp, PBp, i quali vedono contemporaneamente il principio dell'ecclisse; $E\Upsilon Q$ sia la sezione dell'equatore celeste col globo terrestre, a cui dassi il nome di *equatore terrestre;* Υ corrisponda all'equinozio di primavera, S il punto corrispondente all'AR media del Sole per il medesimo istante. Il tempo medio per l'osservatore situato in B è rappresentato dall'arco qS, mentre ES rappresenta il tempo medio per l'osservatore situato in A. Donde apparisce che l'arco Eq, ossia l'angolo al polo P è uguale alla differenza dei tempi medj contati dai due osservatori al principio dell'ecclisse ridotta in gradi a ragione di 15° per ora.

Ne segue ancora dal precedente discorso, che se i due osservatori avranno osservato il fenomeno ad orologi regolati al tempo vero, od anche al tempo siderale, la differenza dei tempi osservati ridotta in gradi a 15° per ora sotto i due diversi meridiani, dà sempre l'angolo da essi compreso nel polo, o ciò che torna lo stesso l'arco di equatore fra loro intercetto. Le stesse conseguenze hanno luogo se ci serviremo del fine dell'ecclisse, oppure dell'ingresso o sortita di una medesima macchia nell'ombra.

184. La posizione di un punto nella superficie terrestre è conosciuta qualora si conosca la sua latitudine geografica, e l'angolo che il meridiano di questo punto fa con un altro meridiano stabilito a piacere, a cui dassi il nome di primo meridiano. Un tale angolo o l'arco corrispondente dell'equatore appellasi dai Geografi *longitudine geografica;* così se PEp è il primo meridiano, la longitudine del punto B è l'angolo APB, o l'arco Eq, che lo misura. Si contano le longitudini da occidente verso oriente da 0° fino a 360°, quantunque alcuni Geografi le contino da 0° fino a 180°, distinguendo col nome di longitudini orientali quelle che appartengono ai punti situati nell'emisfero orientale del globo, e di longitudini occidentali le altre. La po-

sizione del primo meridiano è totalmente arbitraria. Così alcuni lo fanno passare per l'Osservatorio di Parigi, mentre altri lo fanno passare per il Pico di Teneriffa, piccola isoletta vicina all'isola del Ferro nelle Canarie. Si riconosee il primo meridiano in una carta dall'osservare quei punti che hanno una longitudine = o.

Premesse queste cose, è facile determinare la longitudine di un punto rapporto al primo meridiano, o rapporto ad un altro, la cui posizione sia già conosciuta. Due osservatori notino il principio ed il fine di un'ecclisse lunare, non che l'ingresso e sortita delle principali macchie della Luna dall'ombra terrestre, e riducano gl'istanti notati dai loro rispettivi orologi al tempo medio, od anche al tempo sidereo del loro rispettivo meridiano. La differenza dei tempi osservati per una stessa fase ridotta in gradi, darà la differenza delle loro longitudini, onde conosciuta la longitudine di uno di essi, tosto si farà nota l'altra. Egli è poi facile a vedere, che quel paese il quale conterà minor nnmero di ore è più occidentale. Se tutte le fasi coincidono a dare una stessa differenza di longitudini, lo che ha raramente luogo, si potrà credere di aver ben determinato la posizione del luogo sconosciuto rapporto all'altro. In caso diverso si prenderà il medio dei risultamenti ottenuti.

Gli ecclissi di Luna furono già molto in uso per determinare le longitudini dei paesi, a motivo della facilità del metodo e della loro frequenza. Ma perfezionatisi gli stromenti si osservò una grande incertezza nella determinazione delle loro diverse fasi a motivo della penombra terrestre, e perciò sono ora quasi totalmente abbandonati, e vengono a ragione preferiti gli ecclissi di Sole, e le occultazioni delle stelle, le quali sebbene richiedano molta fatica nelle riduzioni e calcoli numerici, pure essa è abbondantemente compensata dall'accordo meraviglioso che presentano diverse osservazioni fatte con la precisione dovuta.

Degli ecclissi di Sole.

185. Dopo di avere trattato con sufficiente estensione degli ecclissi di Luna, ci resta a parlare di quelli del Sole.

Gli ecclissi di Sole hanno luogo quando la Luna avvicinandosi al suo novilunio, ce ne toglie od in tutto, od in parte la vista. Dipendono adunque tali fenomeni dalla posizione relativa dei centri del Sole, della Luna, della terra non solo, ma eziandio dalla varia posizione dell'osservatore sulla superficie terrestre. Quindi allorchè il Sole è ecclissato per un osservatore in particolare, non convien credere che lo sia per tutti gli abitanti della terra al tempo stesso, ed allo stesso modo come accadeva negli ecclissi di Luna, ma lo è variamente giu-

sta la diversa loro posizione. Apparisce di qui che per una completa teoria degli ecclissi di Sole convien risolvere i seguenti quesiti.

1.° In quali circostanze avrà luogo l'ecclisse di Sole nel novilunio.

2.° A qual tempo tale ecclisse avrà il suo principio o fine, o si troverà in una fase determinata per la terra in generale senza aver riguardo ad alcun particolare osservatore.

3.° Quali osservatori della terra vedranno i primi il principio ed il fine dell'ecclisse, ed in generale quali osservatori ad un tempo determinato compreso fra i limiti dell'ecclisse generale vedranno una fase determinata.

4.° Dato un osservatore particolare sulla superficie terrestre, determinare per il medesimo le circostanze tutte dell'ecclisse solare.

Risponderemo successivamente a queste domande, assumendo in quanto alle prime tre, che sono di minor importanza, la terra come sferica, e quanto all'ultima daremo le formule generali riguardando la terra come sferoidica. Del resto coloro che amassero in questo importante argomento una maggior estensione, dovranno rivolgersi ad opere più estese, e singolarmente all'eccellente opera di Sejour (*Traité analytique des mouvements apparents des corps celestes. Vol. II. Paris* 1786 – 1789).

Circostanze generali degli ecclissi di Sole.

186. Prima di accingersi all'esame di queste circostanze generali è bene di osservare, che dipendendo esse dalla posizione rispettiva dei centri della terra, del Sole e della Luna, potremo, dietro i principj di meccanica, assumere i centri del Sole e della terra come fissi nel piano dell'ecclittica, trasportando al centro della Luna i loro moti in senso contrario. Noi fingeremo pertanto la Luna animata nel senso delle longitudini in vicinanza del novilunio da una velocità angolare uguale alla differenza delle velocità della Luna e del Sole, la quale composta colla velocità della Luna in latitudine farà muovere questo corpo in un'orbita fittizia, che appelleremo *orbita relativa*, ed in questa ipotesi le posizioni relative dei centri di questi tre corpi saranno le stesse che nel caso della natura.

Premesse queste cose, siano (*Fig.* 40) S, T i centri del Sole $s\sigma$, e della terra $t\tau$; VO una porzione dell'orbita relativa della Luna intorno alla terra, che convien fingere in un piano inclinato a quello della tavola di una quantità uguale all'inclinazione dell'orbita relativa; V segni l'occidente, O l'oriente, cosicchè sia essa trasportata da V verso O. Si conducano la linea ST e le tangenti st, $s\tau$, St, come nella figura sono rappresentate. Se ora fingiamo la figura ravvolta intorno all'asse ST, è evidente che non vi sarà ecclisse finchè la Luna

non entra nel tronco di cono descritto da $SstT$, e cesserà quando ne sorte, poichè in questo spazio soltanto principia ad intercettare i raggi luminosi provenienti dal Sole.

Giunta pertanto la Luna ad un punto M tale della sua orbita relativa, che il suo disco sia tangente in N al tronco di cono $STst$, il punto t della terra vedrà i due lembi in contatto, ed avrà principio l'ecclisse generale. Pervenuta in m, di modo che il disco lunare sia internamente tangente allo stesso cono, l'osservatore situato in t (il quale a motivo della rotazione diurna della terra sarà ben diverso dal precedente) vedrà la Luna tutta sul Sole, ed avrà principio l'ecclisse annulare, se pure sarà il semidiametro della Luna minore di quello del Sole. Essendo la Luna in μ tangente alla linea $s\tau$, e perciò al cono da essa descritto, l'osservatore τ vedrà ricomparire il lembo occidentale del Sole, e per gli altri osservatori sarà già ricomparso. Cesserà pertanto l'ecclisse di essere totale, ed in conseguenza avrà dall'altra parte principiato ad esserlo quando la distanza dei centri del Sole e della Luna veduta dal centro della terra sia $= ST\mu$.

Per ultimo, se la linea condotta dal centro del Sole al centro della Luna incontra la terra, allora quell'osservatore situato in questo punto d'incontro vede il centro della Luna corrispondere al centro del Sole, e l'ecclisse appellasi *centrale*. Condotta pertanto la tangente Slt, e fatta ruotare intorno ad ST, perchè l'ecclisse sia centrale, dovrà trovarsi il centro della Luna entro di questo cono, e perciò in l principierà ad essere centrale per l'osservatore situato in t.

Chiamando ora e l'angolo al centro della terra compreso da due linee continuamente condotte ai centri del Sole e della Luna, è facile raccogliere da ciò che precede, che

l'ecclise generale avrà il suo principio o fine se . $e = STM$
avrà principio o fine l'ecclisse totale, quando . . $e = ST\mu$
principierà o terminerà l'ecclisse annulare quando $e = STm$
per ultimo l'eccl. centrale principierà o terminerà se $e = STl$.

187. Esprimiamo ora questi angoli col mezzo delle paralassi e dei semidiametri del Sole e della Luna. Chiamisi, come negli ecclissi di Luna, la sua paralasse orizzontale $= \pi$; quella del Sole $= p$; il semidiametro orizzontale della Luna $= \delta$; quello del Sole $= d$.

Sarà l'angolo $STM = STN + NTM = STs + sTN + NTM$ $= STs + tNT - tsT + NTM$, ovvero $STM = d + \pi - p + \delta$.

L'angolo $ST\mu = STn + nT\mu = sTn - sTS + nT\mu$ $= Tn\tau - Ts\tau - sTS + nT\mu$, e quindi $ST\mu = \pi - p - d + \delta$.

L'angolo $STm = STN - NTm = STs + tNT - tsT - NTm$ $= d + \pi - p - \delta$.

Finalmente l'angolo $STl = Tlt - TSt = \pi - p$.

Risulta da quanto abbiamo dimostrato, che la distanza geocentri-

ca e della Luna dal Sole sarà
1.° pel principio e fine dell'ecclisse generale $= \pi - p + \delta + d$
2.° pel principio e fine dell'ecclisse totale . $= \pi - p + \delta - d$
3.° pel principio e fine dell'ecclisse annulare $= \pi - p - \delta + d$, se $\delta < d$
4.° pel principio e fine dell'ecclisse centrale $= \pi - p$.

Apparisce di qui al tempo stesso, che sarà impossibile l'ecclisse se la minor distanza geocentrica della Luna dal Sole sia $> \pi - p + d + \delta$.

188. Egli è ora facile di determinare col calcolo le circostanze generali di un'ecclisse di Sole. A tale oggetto noi supporremo di avere calcolato, mediante le tavole astronomiche, l'istante preciso T del novilunio per un dato meridiano, al quale istante la differenza delle longitudini del Sole e della Luna è $= 0$, e supponiamo che, ritenute le superiori denominazioni, sia inoltre

la latitudine della Luna, supposta boreale . . . . $= \lambda$
il suo moto orario, positivo quando avvicina la Luna al polo boreale . . . . $= n$
il moto orario della Luna in longitudine . . . . $= m$
il moto orario del Sole in longitudine . . . . . . $= m'$.

Ragionando, come sopra negli ecclissi di Luna, t ore dopo il novilunio, la distanza e della Luna dal Sole (in quanto che i piccoli archi, di cui qui si tratta, si possono riguardare come linee rette) sarà data dall'equazione $e^2 = (\lambda + n t)^2 + (m - m')^2 t^2$, la quale, posto $\tang \alpha = \frac{n}{m - m'}$, darà $t = \frac{-\lambda \operatorname{sen}^2 \alpha \pm \operatorname{sen} \alpha \sqrt{(e^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha)}}{n}$.

Questi due valori di e determinano due istanti, nei quali la distanza geocentrica della Luna dal Sole trovasi $= e$, il segno inferiore dando un istante precedente il novilunio, ed il superiore un istante seguente il novilunio.

Dando poi ad e i valori notati superiormente (§ 187) avremo il principio e fine dell'ecclisse generale, totale, annulare ec.; e se per alcuno di questi valori di e, divenisse t immaginario, mancherebbe la fase corrispondente. L'ecclisse è impossibile se la latitudine della Luna nel novilunio è $> (\pi - p + \delta + d) \sec \alpha$; e si cangerà in un semplice contatto se $\lambda = (\pi - p + d + \delta) \sec \alpha$, ove chiaramente apparisce essere α l'inclinazione dell'orbita relativa.

Il mezzo dell'ecclisse avrà luogo al tempo $T - \frac{\lambda \operatorname{sen}^2 \alpha}{n}$ notato sotto il dato meridiano. Si dimostrerà come negli ecclissi di Luna, che la minima distanza dei centri è $= \lambda \cos \alpha$, e che il tempo della massima oscurazione coincide con quello del mezzo dell'ecclisse. Risulta ancora di qui, che la quantità dell'ecclisse generale in digiti sarà $= \frac{6(\pi - p + \delta + d - \lambda \cos \alpha)}{d}$.

Ricerca dei luoghi, nei quali si osservano le diverse fasi di un' ecclisse solare.

189. Per rendere più facile la ricerca della posizione geografica dei luoghi, nei quali accadono le fasi particolari dell' ecclisse solare, noi supporremo di aver costruita una tavola, la quale proceda di 10' in 10 di tempo dal principio alla fine dell' ecclisse generale, od anche di 20' in 20', dalla quale si ottenga la distanza vera geocentrica della Luna dal Sole, come anche gli angoli che l' arco di circolo massimo, su di cui essa si misura, fa con i circoli di declinazione condotti per la Luna e pel Sole. Ecco i precetti per la costruzione di questa tavola preparatoria.

Sia (*Fig.* 41) P il polo dell' equatore, L il centro della Luna, S quello del Sole. La mentovata tavola deve porgere la distanza LS insieme con gli angoli in L ed in S. A tale oggetto si calcolino di 20 in 20 minuti le longitudini e latitudini della Luna, e la longitudine del Sole, donde poi si deducano le ascensioni rette e declinazioni corrispondenti. Basterà calcolare queste quantità di ora in ora, od anche di due in due ore, e quindi coll' interpolazione si dedurranno per gl' intervalli intermedj. Nel triangolo PLS, conoscendo l' angolo in P = differenza di AR di L ed S, i lati PL, PS, complementi delle declinazioni della Luna e del Sole, si potranno sempre colla Trigonometria sferica calcolare le quantità ricercate, al quale oggetto si prestano molto vantaggiosamente le formule di Gauss (Trig. XII). Siccome poi, nel caso degli ecclissi, le differenze di AR e di declinazione sono quantità piccole, trascurandone le potenze superiori alla prima, otterremo la seguente semplicissima soluzione, la quale in siffatti calcoli porgerà sempre un' approssimazione bastante.

Sia per uno dei fissati istanti l' AR della Luna $= a$; quella del Sole $= \alpha$; la declinazione della Luna $= g$; quella del Sole $= \gamma$; la distanza $LS = e$; gli angoli in L, in $S = L$, S. Le equazioni (1), (2), (4) del citato § XII riducendo le denominazioni ivi stabilite alle presenti diverranno

$$e \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(L - S) = g - \gamma;$$
$$e \cos \tfrac{1}{2}(L - S) = (\alpha - a) \cos \tfrac{1}{2}(g + \gamma);$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(L + S) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha - a) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(g - \gamma);$$

le quali con molta speditezza daranno gli angoli L, S, e la distanza e, che deve assumersi positiva; se gli angoli L, S si vorranno determinati fra 0° — 180°, si dovrà dopo la congiunzione scrivere $a - \alpha$ in luogo di $\alpha - a$.

190. Preparata una tale tavola, ecco come potremo trovare la posizione dei paesi che vedono il principio ed il fine dell' ecclisse, non

che di quelli che vedono il principio e fine dell' ecclisse totale, centrale ed annulare.

Considerando attentamente la *figura* 40 si vedrà che il punto t è il primo a vedere il principio dell' ecclisse solare. Frattanto essendo la linea ts tangente al globo terracqueo essa rappresenta l' orizzonte del punto t, e siccome la Luna trovasi all' occidente del Sole, sarà questa la parte orientale dell' orizzonte, sopra cui la Luna sarà sorta per intero, ed il Sole principierà a spuntare; ed essendo la Luna tangente al cono luminoso $SstT$, il raggio MN condotto al primo contatto sarà alla sua superficie normale, e prolungato incontrerà l' asse ST. Perciò i punti M, N, t, T, S saranno in uno stesso piano perpendicolare all' orizzonte, e quindi i centri del Sole e della Luna si trovano in uno stesso verticale, il Sole essendo all' oriente non ancor sorto, e la Luna trovandosi tutta sopra l' orizzonte del luogo cercato.

Del pari alla fine dell' ecclisse generale il Sole sarà per intero tramontato, e la Luna toccherà col suo lembo inferiore l' orizzonte di quel luogo che vedrà l' ultimo contatto, essendo i centri di questi due astri in uno stesso verticale.

Con uno stesso ragionamento ci persuaderemo che quando la Luna sarà in l, in m ed in μ sarà in uno stesso verticale col Sole, ed all' orizzonte dalla parte d' oriente per il principio delle fasi a questi punti corrispondenti, ed all' occidente per il fine.

191. Ciò posto, sia (*Fig.* 41) HR l' orizzonte del luogo dato, pel cui meridiano sono stati calcolati i tempi delle fasi principali dell' ecclisse, e la tavoletta descritta al § 189. S il centro del Sole, L quello della Luna, essendo $LS = \pi - p + \delta + d$. Succedendo a quest' istante nel luogo cercato il contatto, sarà $ab = \pi - p$. Prolungando LS in modo che sia $bV = 90°$, sarà V il zenit del luogo cercato, il cui meridiano sarà in conseguenza PV.

La sua latitudine sarà il complemento di PV, e l' angolo ZPV sarà la differenza di longitudine col dato meridiano HPR.

Nel triangolo PSV conoscendosi $PS = 90 - \gamma$, $SV = 90 + d$, e l' angolo in S, si calcolerà PV e VPS, da cui tosto si otterrà VPZ. Ponendo $PV = 90 - L$, $VPZ = \omega$ e $ZPS = -h =$ angolo orario del Sole (positivo all' occidente del dato meridiano, e negativo all' oriente) avremo $\operatorname{sen} L = -\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} d + \cos\gamma \cos d \cos S$, $\cot(\omega - h) = \frac{-\operatorname{tang} d \cos\gamma}{\operatorname{sen} S} - \operatorname{sen}\gamma \cot S$. Le quantità L ed ω determineranno completamente la posizione del punto cercato.

Che se non si aspiri a tutta la precisione, si potrà porre $SV = 90°$, ed allora avremo $\operatorname{sen} L = \cos\gamma \cos S$, $\cot(\omega - h) = -\operatorname{sen}\gamma \cot S$, le

quali formule si applicano eziandio alla ricerca del punto che vede primo l'ecclisse centrale, totale od annulare, nei quali casi si ha sempre $SV = 90$, o $90 \pm d$.

Se l'angolo ω risulterà positivo, il luogo cercato sarà all'occidente del dato meridiano; in caso diverso sarebbe all'oriente. Così se L è positivo, sarà situato nell'emisfero boreale, e nell'australe se è negativo.

192. Indaghiamo ora la posizione geografica di quei luoghi che ad istanti determinati compresi fra il principio e fine dell'ecclisse centrale avranno un'ecclisse centrale. Perchè l'ecclisse sia centrale per un luogo determinato fa d'uopo che per esso le posizioni apparenti dei centri del Sole e della Luna corrispondano ad uno stesso punto del cielo, e quindi i loro centri veri si trovino in uno stesso verticale in tal distanza dal zenit, che l'effetto delle paralassi annulli la loro distanza geocentrica. Posto ciò, sia (*Fig.* 41) V il zenit ricercato, L, S le posizioni vere della Luna e del Sole; la loro comune distanza apparente dal zenit pongasi $= Z$, e l'arco $LS = e$.

La paralasse avvicina la Luna all'orizzonte di una quantità π sen Z, ed il Sole di p sen Z: quindi il centro della Luna viene avvicinato al centro del Sole di $(\pi - p)$ sen Z. Ma questo avvicinamento deve essere per ipotesi $= e$; dunque avremo $(\pi - p)\,\text{sen}\,Z = e$, e perciò $\text{sen}\,Z = \dfrac{e}{\pi - p}$.

Trovata così la distanza apparente del Sole dal zenit, avremo la distanza vera $VS = Z - p\,\text{sen}\,Z$, e quindi nel triangolo VPS, conoscendo VS, $PS = 90 - \gamma$, e l'angolo S dato dalla tavola per l'istante del calcolo, determineremo PV, e l'angolo VPS, donde coi precetti sopra riferiti otterremo la posizione geografica del luogo cercato.

Segnando in una carta geografica i luoghi che vedono successivamente l'ecclisse centrale, si avrà la curva rappresentante sulla superficie terrestre il cammino del centro dell'ombra lunare.

193. La ricerca dei luoghi terrestri, i quali ad un istante determinato vedono il Sole e la Luna in uno stesso verticale a contatto, oppure in una determinata fase, non è più difficile di quella già esposta per gli ecclissi centrali.

Supponiamo infatti che ricerchisi la posizione di quel paese che ad un istante determinato vedrà il Sole e la Luna in uno stesso verticale, avendo l'ecclisse n digiti.

In questa supposizione la distanza apparente dei centri sarà $= d + \delta - \frac{1}{6} n d$, indicando per δ il semidiametro della Luna aumen-

tato in ragione dell' altezza tuttavia incognita sopra il cercato orizzonte. Se ora rappresentisi per e la distanza vera dei centri data dalla tavola, per Z, Z' le distanze apparenti della Luna e del Sole dal zenit, è facile vedere che poichè i loro centri trovansi in uno stesso verticale, sarà la loro distanza vera eziandio espressa da $Z - Z' - \pi \operatorname{sen} Z + p \operatorname{sen} Z'$, ovvero senza errore sensibile da $Z - Z' - (\pi - p) \operatorname{sen} Z$; perciò si avrà $Z - Z' - (\pi - p) \operatorname{sen} Z = e$; ma $Z - Z'$ esprime altresì la distanza apparente dei centri $d + \delta' - \frac{1}{6} n d$; sostituendo questo valore, ricavando il valore di sen Z, osservando inoltre che $\delta' = \delta + \pi \delta \cos Z$ (§ 165), si troverà

$$\operatorname{sen} Z = \frac{(d + \delta - \frac{1}{6} n d) - e}{\pi - p} + \frac{\pi \delta}{\pi - p} \cos Z \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Se pongasi $\operatorname{sen} \zeta = \frac{d + \delta - \frac{1}{6} n d - e}{\pi - p}$, Z differirà pochissimo da ζ; facendo quindi $Z = \zeta + x$, sarà $\operatorname{sen} Z = \operatorname{sen} \zeta + x \cos Z$; ed uguagliando i due valori di sen Z, si avrà $x = \frac{\pi \delta}{\pi - p} = \delta$ prossimamente. Sarà pertanto $Z = \zeta + \delta$.

Trovato Z, si avrà $Z' = Z - (\pi - p) \operatorname{sen} Z - e = VS$ (*Fig.* 41), e risolvendo il triangolo VPS, in cui si conoscono VS, PS, e l'angolo in S si otterrà come nel § 191 la posizione geografica del luogo cercato.

Abbiamo supposto il centro della Luna più distante dal zenit del centro del Sole; se avesse luogo il contrario si avrebbe dietro analoghi ragionamenti $Z' - Z + (\pi - p) \operatorname{sen} Z = e$, donde si troverebbe

$$\operatorname{sen} Z = \frac{e - (d + \delta - \frac{1}{6} n d)}{\pi - p} - \frac{\pi \delta}{\pi - p} \cos Z \quad . \quad . \quad . \quad (a)'$$

e posto $\operatorname{sen} \zeta = \frac{e - (d + \delta - \frac{1}{6} n d)}{\pi - p}$, sarà $Z = \zeta - \delta$ prossimamente, e quindi $Z' = Z - (\pi - p) \operatorname{sen} Z + e$.

In generale apparisce che al dato istante non vi sarà ecclisse di n digiti per alcun luogo della terra, se risulti sen $Z > 1$.

194. Abbiamo fin qui supposto i centri del Sole e della Luna in uno stesso verticale, ed abbiamo assegnate le posizioni dei luoghi ove si osservano fasi determinate. Che se il Sole e la Luna non corrispondessero allo stesso verticale si determineranno colla Trigonometria agevolmente quei luoghi che ad un dato istante vedono una fase

determinata in una proposta distanza Z dal zenit, per esempio un' eclisse di n digiti.

Sia (*Fig.* 42) Z il zenit del dato luogo, per cui è costruita la tavola ausiliaria, ZP il suo meridiano, P il polo dell' equatore, PV il meridiano, V il zenit del luogo cercato, L, S i centri veri del Sole e della Luna, che in virtù della paralasse si trasportano in L', S'. La distanza apparente dei centri per l' osservatore V sarà $L'S' = d + \delta' - \frac{1}{6} n d$. Ora preso $lL' = SS'$, a motivo della piccolezza delle paralassi, sarà $L'S' = lS$, cioè la distanza apparente dei centri rimane sensibilmente la stessa, se, ritenendo fermo il Sole nel suo verticale, si fa abbassare la Luna di una quantità = alla differenza delle due paralassi di altezza. Si risolva ora il triangolo SLl, in cui $SL = e$, $Sl = d + \delta' - \frac{1}{6} n d$, $Ll = (\pi - p) \operatorname{sen} Z$ (differenza delle due paralassi d' altezza nella data distanza Z dal zenit V), e si determinano gli angoli in S, L. Finalmente il triangolo sferico PLV, in cui si conoscono PL complemento della declinazione della Luna; $LV = Z - \pi \operatorname{sen} Z$, l' angolo $VLP = PLS + SLl - 180°$, darà PV complemento della cercata latitudine, e l' angolo VPL, da cui tolto ZPL angolo orario della Luna pel dato meridiano, si avrà la differenza di longitudine dei due zenit Z, V. Avrebbe condotto egualmente alla cognizione del zenit V il triangolo PSV, in cui si conoscono PS, SV, e l' angolo PSV, che facilmente scorgesi essere $= - PSL + SLl$; gli angoli PSL, PLS, i lati PS, PL essendo dati dalla tavola ausiliaria.

Col mezzo degli esposti precetti, ponendo $n = 0$, $Z = 90°$, si otterranno i paesi che vedono il contatto all' orizzonte, e quindi si potranno portare sopra di una carta geografica per formare le curve dei contatti. Noi non ci occuperemo della loro costruzione, rimandando i nostri lettori all' Astronomia del sig. de Lambre, ove questa teorica è molto diffusa, ed illustrata con opportuni esempj. Solo osserveremo che vi sono in generale due luoghi diversi, i quali vedono all' ora indicata la medesima fase, e nella stessa distanza dal zenit. In fatti (*Fig.* 43) se attorno alla linea LS si costruiscono due triangoli LmS, $Lm'S$ uguali al triangolo LlS della *figura* 42, e se si prolungano i piccoli archi Lm, Lm' in V', V'', di modo che sia $LV' = LV'' = Z$, V', V'' rappresenteranno i zenit di due diversi osservatori, i quali vedranno l' indicata fase. Il zenit V'' si determinerà come sopra. Quanto al zenit V' si determinerà dalla considerazione del triangolo sferico PLV', in cui PL, LV' sono uguali PL, LV''; e l' angolo $PLV' = 180° - PLm = 180° - PLS + mLS$.

Egli è interessantissimo esporre nelle Effemeridi astronomiche queste generali circostanze degli ecclissi solari per avvertire e preparare gli osservatori dei diversi paesi. Siccome non si richiede in questi

calcoli una somma precisione, così, determinata la via del centro dell'ombra sulla terra, le altre circostanze si potranno facilmente ricavare con un globo, o con apposite costruzioni grafiche, l'esposizione delle quali troppo ci allontanerebbe dal nostro proposito, e troveransi con tutta chiarezza esposte nell'Astronomia del sig. la Lande, e nell'opera del sig. Lambert intitolata: *Beyträge zum Gebrauche der Matematik etc. Berl.* 1770. *Vol. II.*

Degli ecclissi di Sole per un luogo particolare della superficie terrestre.

195. Per due motivi può il calcolatore occuparsi degli ecclissi di Sole per un luogo speciale; o vuole cioè col mezzo delle tavole astronomiche determinarne le circostanze per prepararsi ad una buona osservazione, o vuole ricondurre le circostanze osservate a calcolo per confrontarle con le tavole astronomiche, e determinarne il loro errore nella posizione della Luna. Nei due seguenti problemi racchiuderemo le regole da seguirsi sì per l'uno che per l'altro degli esposti fini.

Problema I. Esporre le regole opportune per calcolare colle tavole astronomiche le circostanze dell'ecclisse in un luogo particolare della terra.

Per la soluzione di questo problema fa duopo assegnare il tempo del principio e fine dell'ecclisse, la massima quantità dell'ecclisse, la posizione del punto del disco solare, in cui avrà luogo il primo contatto per potere a quello rivolgere l'attenzione pochi minuti prima ad oggetto di osservare l'istante preciso del principio.

Noi supporremo perciò di aver determinato, mediante le tavole astronomiche, con precisione l'istante della congiunzione pel meridiano del luogo proposto, e di conoscere 1.° la longitudine vera della Luna in novilunio col suo moto orario per le ore precedenti, e seguenti; 2.° la latitudine vera della Luna col suo moto orario; 3.° la paralasse equatoriale della Luna colla sua variazione oraria. Questa moltiplicata pel raggio terrestre dato dalle tavole per il proposto luogo forma la paralasse orizzontale; 4.° il semidiametro orizzontale della Luna col suo moto orario; 5.° la longitudine del Sole, che in congiunzione uguaglia quella della Luna, col suo moto orario; 6.° la paralasse orizzontale del Sole, ed il semidiametro orizzontale del Sole, le quali quantità nel corso di poche ore rimangono sensibilmente costanti.

Avendo con molta cura dedotto le precedenti quantità dalle tavole astronomiche, si domandi la distanza apparente dei centri del Sole e della Luna per un tempo t espresso in ore dopo il novilunio. Si calcolino per questo istante le vere posizioni del centro del Sole e della Luna; lo che facilmente si ottiene, aggiungendo alle quantità determi-

nanti le loro posizioni pel novilunio le rispettive variazioni orarie moltiplicate per t.

Sia per questo istante la longitudine vera della Luna $= \lambda$; la sua latitudine supposta boreale $= \beta$; la sua paralasse orizzontale $= \pi$; il suo semidiametro orizzontale $= \delta$; la longitudine vera del Sole $= l$; la sua latitudine, quantità per lo più trascurabile $= b$; la sua paralasse orizzontale $= p$; il suo semidiametro orizzontale $= d$. Sia inoltre la latitudine del dato luogo diminuita dell' angolo colla verticale $= L$; l'AR del mezzo del cielo $= \theta$.

Dietro i precetti esposti nel capitolo III si calcolino le longitudini e latitudini apparenti del Sole e della Luna. Chiamando perciò g ed h la longitudine e latitudine del zenit corrispondenti ad un'$AR = \theta$, e ad una declinazione $= L$, ed indicando le quantità apparenti con le stesse lettere, ma accentuate, avremo rapporto alla Luna (§ 175)

$$\lambda' = \lambda + \frac{\pi \cos h \operatorname{sen}(\lambda - g)}{\cos\beta - \pi \cos h \cos(\lambda - g)}$$
$$= \lambda + \frac{\pi \cos h \operatorname{sen}(\lambda - g)}{\cos\beta} + \left(\frac{\pi \cos h}{\cos\beta}\right)^2 \frac{\operatorname{sen} 2(\lambda - g)}{2R''} + \ldots$$

$N = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\beta + \cos h \cos\beta \cos(\lambda - g)$,

$s = \pi N - \frac{1}{4}\pi^2 (1 - 3N^2) = \pi N$, prossimamente,

$$\beta' = \beta + \frac{s \operatorname{sen}\beta - \pi(1+s)\operatorname{sen} h}{\cos\beta}; \quad \delta' = \delta(1+s).$$

Quanto ai luoghi apparenti del Sole essi si ottengono da formule analoghe alle precedenti, purchè in esse si cangi π in p, λ in l, β in b. Essendo poi, quando trattasi di ecclissi, la longitudine del Sole poco diversa dalla longitudine della Luna, a motivo delle esigue quantità p e b, potremo adoperare λ in luogo di l, trascurare i prodotti ps', $s' \operatorname{sen} b$; s' essendo rapporto al Sole ciò che era s rapporto alla Luna. Ponendo inoltre nei termini piccolissimi $\cos\beta$ in luogo di $\cos b$, otterremo $l' = l + \dfrac{p \cos h \operatorname{sen}(\lambda - g)}{\cos\beta}$; $s' = pN$;

$b' = b - \dfrac{p \operatorname{sen} h}{\cos\beta} = b - \dfrac{p(1+s)\operatorname{sen} h}{\cos\beta}$, a motivo di ps trascurabile,

$d' = d + ds' = d$ senza errore sensibile.

Posto ciò, considerando il triangolo sferico formato al polo dell' ecclittica, ed ai centri apparenti del Sole e della Luna, chiamando al solito e la loro distanza apparente cercata, sarà

$\cos e = \operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen} b' + \cos\beta' \cos b' \cos(\lambda' - l')$, la quale equazione può eziandio scriversi sotto il seguente aspetto

$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} e = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(\beta' - b') + \cos\beta' \cos b' \,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(\lambda' - l')$, che a motivo di $\beta' - b'$, β', $\lambda' - l'$, e quantità molto piccole, equivale a $e^2 = (\beta' - b')^2 + (\lambda' - l')^2 \cos^2\beta'$.

Questa equazione porge la distanza apparente dei centri per il tempo t dopo il novilunio, a cui corrispondono le longitudini e latitudini apparenti calcolate. Se adesso si osserva che essa contiene soltanto le differenze $\beta' - b'$, $\lambda' - l'$, facilmente ci persuaderemo dietro la forma dei valori di β', b', λ', l', che potremo ritenere per b', l' i loro veri valori dati dalle tavole, purchè nel calcolò di λ', β' si adoperi la differenza $\pi - p$ delle paralassi orizzontali in luogo di π.

Per concludere ora il principio ed il fine dell'ecclisse, il metodo più facile è di calcolare per l'ora precedente e per l'ora seguente il novilunio la distanza apparente dei centri di 20 in 20 minuti di tempo, ed avendo scritte queste distanze in una tavola unitamente ai tempi corrispondenti, coll'interpolazione si dedurrà il momento, in cui la distanza apparente avanti e dopo il novilunio fu $= d + \delta'$; si avrà così il principio e fine dell'ecclisse. Cercando poi il momento della minima distanza, e la minima distanza stessa, si avrà il tempo della massima oscurazione; la quantità dell'ecclisse espressa in digiti sarà $= \dfrac{6(\delta' + d - e)}{d}$.

Resta a determinare la posizione del punto O del disco solare, in cui segue il primo contatto.

Sia perciò (*Fig.* 44) ZP il meridiano del dato luogo, Z il suo zenit; S ed L rappresentino i centri apparenti del Sole e della Luna nel principio dell'ecclisse; ritenendo le superiori denominazioni, considerando i triangoli formati al polo dell'ecclittica, al zenit Z, ed ai punti S od L, avremo $\cos ZS = \cos Z = \cos h \cos(l' - g)$;
$\cos ZL = \cos(Z - \omega) = \text{sen}\, h \,\text{sen}\,\beta' + \cos h \cos\beta' \cos(\lambda' - g)$.

Determinati gli archi Z, $Z - \omega$, osservando che $LS = \delta' + d$, quantità che porremo $= \sigma$, avremo $\cos S = \dfrac{\cos(Z - \omega) - \cos Z \cos\sigma}{\text{sen}\, Z \,\text{sen}\,\sigma}$, la quale svolta in serie, trascurando le potenze delle piccole quantità ω, σ al disopra della prima dimensione, darà

$\cos S = \dfrac{\omega}{\sigma} + \tfrac{1}{2} \cot Z \dfrac{\sigma^2 - \omega^2}{\sigma R''}$, R'' essendo il numero dei minuti secondi contenuti nel raggio. L'ultimo termine del secondo membro si potrà il più delle volte trascurare, massime in questa ricerca, ove non si esige tutta l'esattezza. I gradi contenuti in S daranno la grandezza dell'arco MO valutato dal vertice superiore del lembo solare.

Problema II. Dati gl' istanti del principio e fine di un' ecclisse

osservato in un luogo conosciuto, si domandano gli errori delle tavole astronomiche.

196. Riprendiamo l'equazione superiore

$$e^2 = (\beta' - b)^2 + (\lambda' - l)^2 \cos^2 \beta' \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

nella quale per il principio e fine deve essere $e = \delta' + d$. Supponiamo che sia $\beta' = \beta - m(\pi - p)$, $\lambda' = \lambda + n(\pi - p)$, $\delta' = \delta + r\pi$; sebbene le quantità m, n, r siano funzioni della posizione geografica dell'osservatore, e delle longitudini e latitudini del Sole e della Luna, pure essendo esse moltiplicate per le piccole quantità $\pi - p$, π, saranno sempre dalle tavole astronomiche molto bene determinate per dare con ogni precisione le paralassi in longitudine ed in latitudine. Di più nello stato attuale delle tavole le paralassi orizzontali, i semidiametri e la posizione del Sole possono riguardarsi come abbastanza esatte per considerarle immuni da errore. Che se nelle tavole solari temer si potesse un qualche piccolo errore, si potrebbe questo determinare mediante buone osservazioni del Sole istituite nei giorni precedenti e seguenti l'ecclisse, ed applicarlo alla posizione del Sole calcolata per l'ora del fenomeno. Le sole quantità, le quali abbisognar possono di una qualche correzione sono λ, β; la quale sarà di tal natura da rimanere la stessa nello spazio di qualche ora.

Siano $d\lambda$, $d\beta$ le correzioni da farsi a λ e β; l'equazione (1) pel fine dell'ecclisse darà $e^2 = (\beta' - b)^2 + (\lambda' - l)^2 \cos^2 \beta'$, ed applicate le indicate correzioni diverrà

$(\delta' + d)^2 = (\beta' - b + d\beta)^2 + (\lambda' - l + d\lambda)^2 \cos^2 \beta'$, ove pongo $\cos^2 \beta'$ in luogo di $\cos^2 (\beta' + d\beta)$, essendo l'errore che ne risulta trascurabile.

Sottratte una dall'altra queste due equazioni si otterrà (trascurando i termini di secondo ordine rapporto alle correzioni piccolissime) $e(\delta' + d - e) = (\beta' - b)\, d\beta + (\lambda' - l) \cos^2 \beta'\, d\lambda$. Una simile equazione otterremo pel principio dell'ecclisse; laonde riducendo a numeri i coefficienti di $d\beta$, $d\lambda$ in queste due equazioni, ricaveremo da esse le correzioni cercate risolvendole coi metodi delle equazioni di primo grado.

197. Se l'ecclisse è totale, od anche annulare, in allora, oltre gl'istanti del principio e fine dell'ecclisse, sono da osservarsi con molta cura i contatti interni al principio e fine dell'ecclisse totale o annulare, per i quali istanti si ha $e = \delta' - d$. Calcolando per queste nuove osservazioni la distanza apparente dei centri, formeremo allo stesso modo due altre equazioni di condizione, che colle prime concorrere dovranno a dare le stesse correzioni $d\beta$ e $d\lambda$, e si potranno a quelle unire per formare un sol sistema di equazioni lineari, che si risolverà col metodo dei minimi quadrati esposto in fine del cap. VIII.

Che anzi se la stessa ecclisse sarà stata in molti luoghi ben co-

nosciuti osservata, si formerà per ogni osservazione la corrispondente equazione di condizione fra $d\lambda$ e $d\beta$, e quindi applicando a questo sistema di equazioni lineari l'indicato metodo dei minimi quadrati, si otterranno i più probabili valori di $d\lambda$, $d\beta$, nei quali gli errori delle osservazioni avranno la minima influenza.

198. Abbiamo supposto i diametri del Sole e della Luna ben determinati, ed abbiamo trascurato la correzione, di cui per avventura abbisognar potrebbero le tavole su tale proposito. Se questi fossero in errore, chiamando $d\delta$, dd le loro correzioni, è facile vedere che le equazioni di condizione per il principio e fine dell'ecclisse sarebbero della forma

$$e(d\delta + dd + \delta' + d - e) = (\beta' - b)\, d\beta + (\lambda' - l) \cos^2 \beta'\, d\lambda,$$

e per il principio e fine dell'ecclisse annulare si avrebbe

$$e(d\delta - dd + \delta' - d - e) = (\beta' - b)\, d\beta + (\lambda' - l) \cos^2 \beta'\, d\lambda,$$

nelle quali i coefficienti delle correzioni indeterminate sono funzioni di quantità date dalle tavole da calcolarsi in numeri per l'ora dei fenomeni osservati. Così ogni ecclisse annulare somministra quattro di queste equazioni per un luogo particolare, dalle quali dedurre si devono i valori delle cercate correzioni.

Il celebre Sejour ha il primo sospettato una correzione di $-3'',5$ da farsi al diametro del Sole, sia che questa dipender potesse da un errore commesso nella sua misura, sia da un errore ottico costante. Egli suppone che il nostro occhio veda un poco amplificati i diametri degli oggetti luminosi; onde risulta che quando siegue il contatto, la distanza dei cerchi è minore di quella calcolata nell'ipotesi dei diametri amplificati. Mechain e Lexell hanno in seguito confermato i risultamenti di Sejour, e molti Astronomi hanno adottato di diminuire il semidiametro solare dato dalle tavole di $3'',5$ per l'effetto puramente ottico dell'irradiazione (*). Un'altra piccola correzione generalmente trascurata dipende dalla rifrazione dei raggi solari per l'atmosfera lunare. Comunque sia di queste piccole correzioni, non essendo per anche ben riconosciute e determinate, convien attendere che moltiplici discussioni di buone osservazioni aumentino le nostre cognizioni, e verifichino le nostre congetture su questo delicato argomento.

199. Sogliono gli Astronomi, durante l'ecclisse, misurare le distanze dei corni, ossia la corda *A B* (*Fig.* 45) comune al disco apparente del Sole e della Luna, notando il tempo della misura osser-

(*) La discussione di molte osservazioni dell'ecclisse annulare osservato nelle principali Specole di Europa ai 7 Settembre 1820 mi ha additato la correzione di $-3'',825$ nel semidiametro solare calcolato dalle tavole del signor Carlini, e di $-0'',125$ nel semidiametro della Luna preso dalle tavole del signor Burkardt. Sembra quindi non potersi più dubitare della correzione per l'irradiazione proposta da Sejour (*Memorie della Società Italiana Vol. XIX.*).

vata. Dietro queste misure è facile ottenere la distanza apparente LS dei centri. Condotti in fatti i raggi $LA = \delta'$, $AS = d$, e ponendo $AB = 2a$, $LS = E$ avremo $\text{sen}\, S = \frac{a}{d}$, $\text{sen}\, L = \frac{a}{\delta'}$, e quindi $E = a\,(\cot S + \cot L)$.

Calcolando colle tavole astronomiche la distanza apparente dei centri, chiamandola e, avremo $e^2 = (\beta' - b)^2 + (\lambda' - l)^2 \cos^2 \beta'$. Ponendo ora $E = e + de$, de essendo la correzione dovuta agli aumenti $d\beta$, $d\lambda$ delle quantità β, λ date dalle tavole, formeremo la seguente equazione di condizione

$$e\, de = e\,(E - e) = (\beta' - b)\, d\beta + (\lambda' - l)\, d\lambda \cos^2 \beta'.$$

Avendo formate tante di queste equazioni quante sono le fasi misurate, ne dedurremo i valori di $d\beta$, $d\lambda$, che confrontati coi superiori si serviranno scambievolmente di riprova.

Utilissime sono siffatte osservazioni verso l'istante della congiunzione apparente, mentre il termine $(\lambda' - l)\, d\lambda \cos^2 \beta$ essendo o nullo, o piccolissimo, esse porgono il valore di $d\beta$ con tanta maggior precisione, quanto più grande sarà $\beta' - b$, cioè quanto maggiore la latitudine apparente della Luna.

Determinate dietro i metodi precedenti le correzioni $d\beta$ e $d\lambda$, si applicheranno alla longitudine della Luna calcolata per l'istante del novilunio delle tavole, quindi facilmente coll'ajuto del moto orario si dedurrà il vero istante del novilunio con la vera longitudine e la vera latitudine del centro della Luna.

Delle occultazioni delle stelle fisse.

200. Dopo tutto quello che abbiamo detto degli ecclissi di Sole, nulla vi sarà di più facile, che il calcolo dell'occultazione di una stella fissa.

Allorquando la Luna col suo moto proprio nell'orbita si avvicina ad una qualche stella fissa, il momento in cui la toglie alla nostra vista appellasi *istante dell'immersione*, e quello in cui continuando ad allontanarsi da essa verso oriente ce la rende di nuovo visibile chiamasi *istante dell'emersione*.

Si notano tali fenomeni nelle Effemeridi astronomiche, e si osservano con molta cura, sia per rettificare le tavole lunari, sia per determinare le longitudini geografiche dei luoghi ove s'istituiscono le osservazioni.

Le formule da noi esposte per il calcolo degli ecclissi di Sole si applicano egualmente al calcolo delle occultazioni, osservando che per le stelle il diametro e la paralasse diurna sono $= 0$, in grazia della loro somma distanza, e che per l'istante del novilunio conviene pren-

dere l'istante della congiunzione della Luna con la stella. Di più la posizione della stella presa dal catalogo, e ridotta alla sua posizione apparente con applicarvi quei piccoli movimenti, di cui faremo parola trattando dei piccoli movimenti delle stelle fisse, rimane per qualche ora invariabile.

Laonde chiamando la longitudine apparente della stella $= l$, la sua latitudine posta boreale, e minore di quella della Luna $= b$, e ritenendo rapporto alla Luna le superiori denominazioni, calcoleremo di 30′ in 30′ per l'ora precedente, e per l'ora seguente la congiunzione, le longitudini e latitudini apparenti della Luna, non che il suo semidiametro d'altezza. Quindi dalla formula
$e^2 = (\beta' - b)^2 + (\lambda' - l)^2 \cos\beta' \cos b$ otterremo per gli stessi istanti la distanza apparente del centro della Luna dalla stella, donde colla opportuna interpolazione si dedurrà il momento in cui sarà $e = \delta'$ tanto avanti che dopo la congiunzione apparente. Il primo somministrerà il momento dell'immersione, l'altro quello dell'emersione.

Sogliono eziandio gli Astronomi aggiungere la posizione del punto in cui accade l'emersione per poter verso quello dirigere l'attenzione. Si ottiene esso con gli stessi precetti, coi quali abbiamo determinato il punto del primo contatto negli ecclissi di Sole.

Chiamando pertanto Z, $Z - \omega$ le distanze apparenti della Luna e della stella dal zenit nell'istante dell'emersione, ed osservando che in questo caso $\sigma = \delta'$, avremo $\cos S = \frac{\omega}{\delta'} + \frac{1}{2} \cot Z \frac{\delta'^2 - \omega^2}{\delta' R''}$, S essendo l'arco del disco lunare compreso fra il verticale che passa per il centro della Luna, ed il punto dell'emersione espresso in gradi.

Se poi in un luogo determinato della terra si saranno con precisione osservati gl'istanti dell'immersione e dell'emersione di una stella, potremo col loro mezzo determinare le correzioni della longitudine e latitudine della Luna data dalle tavole. Chiamando in fatti per l'istante dell'immersione δ', β', λ' il semidiametro, la latitudine e la longitudine apparenti della Luna; δ'', β'', λ'' le stesse quantità per l'emersione, avremo, come negli ecclissi di Sole,

$$e'^2 = (\beta' - b)^2 + (\lambda' - l)^2 \cos\beta' \cos b$$
$$e''^2 = (\beta'' - b)^2 + (\lambda'' - l)^2 \cos\beta'' \cos b$$

donde formeremo le due equazioni di condizione

$$e' (\delta' - e') = (\beta' - b)\, d\beta + (\lambda' - l) \cos\beta' \cos b\, d\lambda$$
$$e'' (\delta'' - e'') = (\beta'' - b)\, d\beta + (\lambda'' - l) \cos\beta'' \cos b\, d\lambda$$

dalle quali dedurremo le correzioni cercate $d\beta$, $d\lambda$.

Che se la stessa occultazione in più luoghi bene determinati sarà stata osservata, allora dopo aver formato per ogni osservazione le cor-

rispondenti equazioni di condizione, risolvendole col metodo dei minimi quadrati, avremo le correzioni più probabili delle tavole lunari.

201. Il chiar. sig. Carlini propose nelle Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1809 un nuovo metodo per dedurre da un' occultazione osservata con cura la longitudine vera della Luna, e la sua latitudine desumendo dalle tavole astronomiche i soli moti orarj in longitudine e latitudine, la paralasse, ed il diametro orizzontale, risparmiando così gran parte del calcolo preparatorio dalle tavole lunari. Le formule dal sig. Carlini riferite nel citato luogo possono semplicemente dimostrarsi nel modo seguente.

Rappresenti (*Fig.* 46) AB l'ecclittica, L il centro della Luna al momento dell' immersione dell' astro S, la cui longitudine $= l$, e latitudine $= b$. Al momento dell' immersione è chiaro che la longitudine e latitudine apparente del punto S del globo lunare sono uguali alla longitudine e latitudine della stella. Si calcolino ora con le formule (a), (b) del § 177 le paralassi in longitudine e latitudine corrispondenti ad una longitudine apparente l, e ad una latitudine apparente b, e s'indichino per P, p.

La longitudine vera del punto S del globo lunare sarà $= l - P$, e la sua latitudine $= b - p$. Si conduca ora il parallelo all' ecclittica Sq, e si ponga l'angolo $SLq = \alpha$. Considerando il triangolo SLq come rettilineo, sarà $Sq = \delta \operatorname{sen} \alpha$, e quindi $Pp = \dfrac{\delta \operatorname{sen} \alpha}{\cos (b - p)}$ (XVIII osservaz.), ed $Lq = \delta \cos \alpha$. Ponendo per l'istante dell'immersione la longitudine vera della Luna $= \lambda$, e la sua latitudine $= \beta$, avremo evidentemente

$$(1)\ \lambda = l - P - \frac{\delta \operatorname{sen} \alpha}{\cos (b - p)}\,; \qquad (2)\ \beta = b - p + \delta \cos \alpha\,.$$

Chiamando P', p', α' le quantità corrispondenti a P, p, α al momento dell' emersione, e supponendo che m, n rappresentino il moto della Luna in longitudine ed in latitudine, di modo che la sua longitudine vera sia $= \lambda + m$, e la sua latitudine $= \beta + n$, troveremo con pari ragionamenti

$$(3)\ \lambda + m = l - P' + \frac{\delta \operatorname{sen} \alpha'}{\cos (b - p')}\,; \quad (4)\ \beta + n = b - p' + \delta \cos \alpha'\,.$$

Si osservi che i divisori $\cos (b - p)$, $\cos (b - p')$, che entrano in queste equazioni differiranno sempre pochissimo, a motivo della piccolezza dell' arco $b - p$, e della piccola variazione della paralasse in latitudine. Ponendo pertanto $b - \frac{1}{2}(p + p') = \gamma$, si potrà senza errore sensibile sostituire ad essi $\cos \gamma$. Sottraendo poi la (1) dalla (3), e la (2) dalla (4), formeremo le due seguenti

$$(m + P' - P) \cos \gamma = \delta (\operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \alpha) = 2\,\delta \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')$$

$$n + p' - p = \delta (\cos \alpha' - \cos \alpha) = 2 \delta \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (\alpha' + \alpha) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (\alpha - \alpha'),$$

le quali danno $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - \alpha') = \dfrac{n + p' - p}{(m + P' - P) \cos \gamma}$;

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (\alpha' + \alpha) = \frac{(m + P' - P) \cos \gamma}{2 \delta \cos \frac{1}{2} (\alpha - \alpha')} = \frac{n + p' - p}{2 \delta \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha - \alpha')}.$$

Dietro queste equazioni si calcoleranno i valori di $\tfrac{1}{2} (\alpha - \alpha')$, $\tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha')$ determinando la specie di quest' ultimo in modo che risulti α acuto, ovvero ottuso secondo che il punto S è al mezzodì od al settentrione del centro della Luna; cioè, in virtù dell' equazione (2), in modo che sia α acuto od ottuso secondo che $\beta + p > b$, ovvero $< b$, al quale oggetto basta una conoscenza prossima della latitudine β del centro lunare dedotta da un calcolo grossolano fatto con l' effemeride. Avendo determinato $\tfrac{1}{2} (\alpha - \alpha')$, $\tfrac{1}{2} (\alpha' + \alpha)$, se ne dedurranno tosto gli angoli α, α', i quali sostituiti nelle equazioni superiori daranno i valori di λ e di β. In seguito mediante il moto orario in longitudine e latitudine si dedurrà facilmente l' istante della congiunzione vera, e la latitudine vera della Luna nel momento della congiunzione.

Confrontando la latitudine e longitudine della Luna con quelle date dalle tavole per l' istante della congiunzione, otterremo immediatamente l' errore delle tavole.

Gli angoli α, α', che abbiamo qui introdotto, dietro la disposizione data loro nella figura, dovranno essere compresi fra 0° e 180°, e poichè essi hanno la loro origine nel punto più australe del globo lunare quando la latitudine della Luna è boreale, è facile convincersi che essendo questa australe si dovrà porre $180 - \alpha$, $180 - \alpha'$, in luogo di α e di α', qualora si voglia riferire la loro origine al punto del bordo lunare più vicino all' ecclittica, come nel caso precedente aveva luogo. Dietro queste modificazioni, ritenendo le superiori denominazioni, avremo le seguenti equazioni per le stelle australi

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha' - \alpha) = \frac{n + p' - p}{(m + P' - P) \cos \gamma};$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (\alpha' + \alpha) = \frac{(m + P' - P) \cos \gamma}{2 \delta \cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)} = \frac{n + p' - p}{2 \delta \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)}.$$

Avendo da queste equazioni determinato α, α', avremo per calcolare la posizione vera della Luna nell' immersione

$$\lambda = l - P - \frac{\delta \operatorname{sen} \alpha}{\cos (b - p)}; \qquad \beta = b - p - \delta \cos \alpha;$$

ove non convien perdere di vista, che dovranno riguardarsi le latitudini australi come negative.

Abbiamo nelle formule precedenti supposto che il semidiametro orizzontale δ fosse lo stesso nell' immersione ed emersione; egli è real-

mente diverso; ma le sue variazioni essendo sempre piccolissime nella durata di un'occultazione, si potranno trascurare senza sensibile errore, o pure per maggiore esattezza si potrà prendere il suo medio valore fra l'immersione e l'emersione. Del resto chi desiderasse di vedere come fino all'ultimo scrupolo vi si possa aver riguardo, consulti la citata Memoria del sig. Carlini.

202. Accade sovente che l'osservazione di un'occultazione sia incompleta. In allora conviene necessariamente desumere dalle tavole tanto col primo metodo, quanto col secondo la latitudine della Luna per dedurre poi la longitudine dall'osservazione, o viceversa.

Comodissime risultano le formule superiori anche in questo caso. Poniamo in fatti osservata l'immersione, e prendasi dalle tavole per questo istante la latitudine vera della Luna. L'equazione (2) darà $\cos \alpha = \frac{\beta + p - b}{\delta}$. Determinato α, l'equazione (1) porge immediatamente il valore di λ, dal quale con molta facilità si dedurrà l'istante della congiunzione.

Scolio. Il sig. Andrea Conti di Roma ha applicato con ingegnoso artificio (*Opuscoli Astronomici. Roma* 1818) il metodo di Carlini al calcolo degli ecclissi solari. Le formule da calcolarsi in questo caso si deducono facilmente dietro l'analisi precedente, come può vedersi in un mio articolo inserito nelle *Astronomische Nachrichten di Schumacher*. Vol. VI. pag. 405.

Applicazione degli ecclissi solari, ed occultazioni di stelle alla ricerca delle longitudini geografiche.

203. Uno degli usi più importanti degli ecclissi solari ed occultazioni si è il potere col loro mezzo determinare le longitudini geografiche di quei paesi, nei quali accade di poter osservare siffatti fenomeni. Abbiamo già veduto come alla ricerca delle longitudini geografiche si prestavano gli ecclissi di Luna, ed abbiamo nel tempo stesso fatto osservare, che le longitudini indi dedotte godevano di poca precisione a motivo dell'incertezza nelle osservazioni proveniente dalla penombra terrestre. Gli ecclissi del Sole, e più ancora le occultazioni delle stelle somministrano maggior precisione in grazia della esattezza di cui sono suscettibili queste osservazioni, quando vengano fatte con molta cura, ed in grazia del moto rapido della Luna, in virtù di cui essa prontamente si avvicina alle stelle occultate, e si allontana dalle medesime.

Noi supporremo per maggior facilità di aver osservato l'occultazione di una stella, e di averne ben determinato il tempo sotto il meridiano del paese incognito, che per brevità indicherò per B. Siasi

inoltre questa stessa occultazione osservata in un luogo ben conosciuto indicato da P, e si domandi la differenza dei meridiani di questi due luoghi. È chiaro che la questione riducesi a determinare il tempo che contavasi al meridiano di P al momento dell' immersione, o dell' emersione, poichè la differenza di questo con l' osservato darà la differenza delle longitudini.

Avendo ridotto a calcolo la occultazione osservata nel luogo dato P, supponiamo determinati gli errori delle tavole lunari in longitudine e latitudine. Prendiamo poscia a calcolare l' occultazione nel meridiano di B, e consideriamo l' immersione, dovendosi applicare all' emersione gli stessi ragionamenti.

Sia il tempo dell' immersione osservata in $B = t$; la differenza incognita dei meridiani fra B, P ridotta in tempo $= \tau$. Sarà il tempo dell' immersione in B contato dal meridiano di $P = t + \tau$: supponendo il luogo incognito all' occidente del dato. La latitudine del luogo B diminuita dell' angolo della verticale $= \varphi$. Nello stato attuale della geografia la quantità τ sarà sempre sufficientemente bene conosciuta, e non potrà abbisognare che di una qualche leggera correzione, che indicheremo per $d\tau$.

Mediante le tavole astronomiche ed il tempo $t + \tau$ si calcolino la longitudine e la latitudine della Luna, e correttele dall' errore delle tavole siano λ, β. Si calcolino pure le quantità π, δ. Colla latitudine φ e pel tempo $t + \tau$ si calcolino gli angoli g, h esprimenti la longitudine e latitudine del zenit. Quindi si formino le quantità λ', β', δ'. Chiamata e la distanza apparente della Luna dalla stella, sarà

$$e^2 = (\beta' - b)^2 + (\lambda' - l)^2 \cos\beta' \cos b'.$$

Se riuscirà $e = \delta'$, il valore di τ sarà esatto, qualunque altro errore essendo stato per ipotesi allontanato; in caso diverso, indicando per $d\tau$ la sua correzione, per il tempo $t + \tau + d\tau$, la distanza apparente diverrà $= e + \left(\frac{de}{dt}\right) d\tau$, la quale posta $= \delta'$, darà

$$d\tau = (\delta' - e) : \left(\frac{de}{dt}\right).$$

Sebbene non sarebbe difficile assegnare il valore analitico di $\left(\frac{de}{dt}\right)$, pure la formula a cui si perviene essendo alquanto laboriosa al calcolo numerico, facilmente il determineremo nel modo seguente. Si calcoli la distanza apparente della Luna dalla stella eziandio per il tempo $t + \tau + 10'$, e sia questa $= e'$. Sarà $e' = e + \left(\frac{de}{dt}\right) 10$. Onde avremo $\left(\frac{de}{dt}\right) = \frac{e' - e}{10}$; sostituito questo valore in quello di $d\tau$,

otterremo $d\tau = \frac{10(\delta' - e)}{e' - e}$ espresso in minuti. Se questa correzione riuscisse troppo forte, cosicchè si potesse temere un qualche errore per parte dei termini di secondo ordine trascurati, si riprincipierebbe un nuovo calcolo col valore di τ corretto, e così dopo pochi tentativi sempre si perverrà alla vera scoperta della differenza dei meridiani.

In simile guisa dall' emersione potrassi dedurre la differenza dei meridiani, e la coincidenza dei due risultamenti farà fede al tempo stesso dell' esattezza del calcolo e delle osservazioni.

204. Si presta con somma facilità alla ricerca della longitudine geografica di B il metodo esposto nel § 201. In fatti si calcoli, mediante i precetti ivi insegnati, la longitudine della Luna per l'immersione tanto nell' osservazione fatta in P, che in quella fatta in B. Quindi col mezzo del moto orario si calcoli il tempo della congiunzione vera della Luna colla stella nei due luoghi: la differenza dei due tempi calcolati ridotta in gradi dà la cercata differenza dei meridiani.

Termineremo coll' epilogo delle formule opportune pel calcolo di una occultazione col metodo dato nel § 201 per comodo di coloro che vorranno applicarlo alle riduzioni di sì fatte osservazioni, e con un esempio ad utile esercizio dei principianti.

Sia t il tempo medio dell' immersione osservata, t' quello dell' emersione. Si calcolino i rispettivi tempi siderei, ed avendoli ridotti in gradi si chiamino θ, θ'. La latitudine del luogo dell' osservazione *diminuita* dell' angolo colla verticale sia L. Per queste due osservazioni si calcolino gli angoli g, h. Chiamando ι l' obbliquità dell' ecclittica, si otterranno mediante le formule (a'), (b'), (c') § 64, che si riducono alle seguenti

$$(1)\ \text{tang}\,\zeta' = \text{sen}\,\theta \cot L; \qquad (2)\ \text{tang}\,g = \frac{\text{tang}\,\theta\,\text{sen}(\zeta' + \iota)}{\text{sen}\,\zeta'};$$

$$(3)\ \text{tang}\,h = \text{sen}\,g \cot(\zeta' + \iota).$$

Si ottengono quelle per l'emersione cangiando θ in θ', h in h', g in g'.

Le formule (b), (a) del § 177 daranno per l' immersione

$$p = -\pi \cos b\,\text{sen}\,h + \pi\,\text{sen}\,b \cos h \cos(l - g) + \frac{\pi^2\,\text{tang}\,b \cos^2 h\,\text{sen}^2(l - g)}{2R''};$$

$$P = \frac{\pi \cos h\,\text{sen}(l - g)}{\cos(b - p)}.$$

Queste stesse equazioni daranno le quantità p', P' cangiando semplicemente h, g in h', g', giacchè le quantità b, l rimangono costanti. Per ultimo, chiamando m, n il moto della Luna in longitudine ed in latitudine fra l' immersione e l' emersione, si calcolino gli angoli α, α' colle due seguenti equazioni, nelle quali si pone

$\gamma = b - \frac{1}{2}(p + p')$,

$$\tang \tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha') = \pm \frac{(n+p'-p)}{(m+P'-P)\cos\gamma};$$

$$\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') = \frac{(m+P'-P)\cos\gamma}{2\,\delta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')} = \pm \frac{(n+p'-p)}{2\,\delta\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}.$$

Quindi si avrà

$$\lambda = l - P - \frac{\delta\,\text{sen}\,\alpha}{\cos(b-p)} = \text{longit. di Luna in immersione};$$

$$\beta = b - p \pm \delta\cos\alpha = \text{latitud. di Luna in immersione};$$

valendo in queste formule i segni superiori per le stelle boreali, gl'inferiori per le australi.

Chiamato poi μ il moto orario in longitudine, ν quello in latitudine, sarà

$$\text{tempo della congiunzione} \;.\;.\;.\;.\; = t + \frac{(l-\lambda)\,1^h}{\mu};$$

$$\text{latitudine di Luna in congiunzione}. = \beta + \frac{\nu(l-\lambda)}{\mu}.$$

Esempio relativo alle formule precedenti.

205. La sera del 23 Gennajo 1812 osservai l'occultazione di α del toro come segue

immersione, tempo medio $t = 7^h\, 48'\, 50'',2$ }
emersione. . . . . . $t' = 8\;\; 51\;\; 46\;,9$ } al merid. di Padova.

Si formeranno quindi i tempi siderali corrispondenti, che ridotti in gradi daranno $\theta = 59°\, 10'\, 42''$, $\theta' = 74°\, 57'\, 27''$. Se assumasi per il rapporto dei semiassi terrestri la frazione $\frac{329}{330}$, l'angolo della verticale sotto la latitudine di questo Osservatorio $45°\, 24'\, 3''$ sarà dietro le tavole lunari $= 10'\, 26''$, che tolto dalla medesima latitudine darà $L = 45°\, 13'\, 37''$. Posta poi l'obbliquità dell'ecclittica $= 23°\, 27'\, 40''$, il calcolo delle equazioni (1), (2), (3) darà $g = 66°\, 41'\, 20''$, $h = 24°\, 13'\, 50''$, $g' = 78°\, 36'\, 10''$, $h' = 22°\, 22'\, 10''$, ove è da avvertire, che ho eseguito questo calcolo tenendo conto delle sole decine di secondi, poichè le quantità g, h servendo al calcolo delle paralassi p, P, una più scrupolosa esattezza sarebbe inutile.

Prendendo ora la posizione apparente della stella dal catalogo del signor Piazzi, e ricavandone la longitudine e latitudine si ottiene $l = 67°\, 9'\, 47'',5$, $b = -\, 5°\, 28'\, 48'',9$. Le tavole lunari per l'immersione e per l'emersione daranno $\log \text{sen}\, \pi = 8,22187$, $\log \text{sen}\, \pi' = 8,22173$, e sommando con questi numeri il costante $\log R'' = 5,31443$ per ridurre in secondi i seni delle paralassi oriz-

zontali, avremo $\log \pi = 3,53630$, $\log \pi' = 3,53616$. Le stesse tavole daranno il moto orario in longitudine in quel punto dell'orbita lunare $= 33' \, 14'',4$; in latitudine $= -4'',5$. Quindi per la durata dell'occultazione formerassi il moto in longitudine $m = 34' \, 52'',3$, ed il moto in latitudine $n = -4'',5$. Sarà poi dietro le tavole stesse $\delta = 15' \, 38'',5$, $\delta' = 15' \, 38'',2$, e però il medio semidiametro fra l'immersione e l'emersione che adopreremo per maggiore esattezza $= 15' \, 38'',35$. Calcolando dietro questi dati la paralasse in latitudine p per l'immersione ed emersione, avendo l'opportuno riguardo ai segni nelle formule (b) ed (a) otterremo $p = -28' \, 23'',9$, $p' = -26' \, 39'',6$, e però $b - p = -5° \, 0' \, 25'',0$; $b - p' = -5° \, 2' \, 9'',3$; donde formasi $\gamma = b - \tfrac{1}{2}(p + p') = -5° \, 1' \, 17''$. In seguito calcolando per l'immersione ed emersione la paralasse in longitudine, si otterrà $P = +26'',1$; $P' = -10' \, 32'',8$.

Per il calcolo degli angoli α, α' formeremo prima le quantità $n + p' - p = +1' \, 38'',8$; $m + P' - P = +23' \, 53'',4$, ed osservando che la stella è australe, dalle due formule

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha') = -\frac{(n + p' - p)}{(m + P' - P)\cos\gamma}; \quad \text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{(m + P' - P)\cos\gamma}{2\delta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')}$$

otterremo $\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha') = -3° \, 57',5$; $\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = +49° \, 42',0$; donde, risulta $\alpha = 45° \, 44',5$; $\alpha' = 53° \, 39',5$. Quindi si formerà

$$\text{la long. di ☽ nell'immers.} = \lambda = l - P - \frac{\delta \,\text{sen}\, \alpha}{\cos(b - p)} = 66° \, 58' \, 6'',8,$$

la sua latitudine corrispondente $\beta = b - p - \delta \cos \alpha = -5° \, 11' \, 19'',9$. Al momento dell'immersione la differenza $l - \lambda$ fra la longitudine della stella e della Luna era dunque $= 11' \, 40'',7$. Quindi la congiunzione avrà avuto luogo al tempo

$$t + \frac{(l - \lambda) \, 1^h}{35' \, 14'',4} = 7^h \, 48' \, 50'',2 + 21' \, 4'',9 = 8^h \, 9' \, 55'',1,$$

per il quale istante la longitudine vera della Luna era $= 67° \, 9' \, 47'',5$, e la sua latitudine $= -5° \, 11' \, 21'',5$.

La stessa occultazione fu osservata dal signor Oriani nell'Osservatorio di Milano come segue

$$\left.\begin{array}{ll} \text{immersione} & t = 7^h \, 34' \, 49'',3 \\ \text{emersione} & t' = 8 \;\; 35 \;\; 15 \;,7 \end{array}\right\} \text{tempo medio in Milano;}$$

donde rilevasi $\theta = 55° \, 40' \, 21''$; $\theta' = 70° \, 49' \, 25''$. Posto per l'osservatorio di Milano $L = 45° \, 28'' \, 1' - 10' \, 26'' = 45° \, 17' \, 35''$, si troverà $g = 64° \, 4' \, 10''$, $g' = 75° \, 29' \, 0''$, $h = 24° \, 52' \, 40''$, $h' = 22° \, 47' \, 50''$, $p = -28' \, 57'',6$, $p' = -27' \, 5',1$, $P = +2' \, 49'',0$, $P = -7' \, 40'',3$, $m = 33' \, 29'',0$, $n = -4'',5$. Quindi poi si formerà $\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha') = -4° \, 29' \, 35''$; $\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = 47° \, 16' \, 35''$, e però $\alpha = 42° \, 47' \, 0''$. Per ultimo si otterrà $\lambda = 66° \, 56' \, 18'',7$;

$\beta = -5^\circ\, 11'\, 18'',0$. Quindi coll'ajuto del moto orario si troverà che la congiunzione a Milano ebbe luogo a $7^h\, 34'\, 49'',3 + 24'\, 19'',9$, cioè a $7^h\, 59'\, 9'',2$, per il qual momento la longitudine vera della Luna era $= 67^\circ\, 9'\, 47'',5$, e la sua latitudine $= -5^\circ\, 11'\, 19'',6$. Se le osservazioni fossero esatte dovrebbero le due latitudini coincidere; essendovi una piccola differenza di $1'',9$, avremo, preso il medio, la latitudine della Luna in congiunzione con la stella $= -5^\circ\, 11'\, 20'',55$.

La differenza dei meridiani di Padova e Milano è data dalla differenza dei tempi della congiunzione, che però sarà $= 10'\, 45'',9$; ed in gradi $= 2^\circ\, 41'\, 28'',5$; e siccome a Milano contasi un numero minore di ore, così sarà situato all'occidente di Padova.

Questa occultazione fu già calcolata con molte altre dal defunto mio collega Bertirossi-Busata negli Atti della Società Italiana T. XVII, da cui ho preso gli elementi per il calcolo.

CAPITOLO XV.

Della riduzione delle osservazioni della Luna nel meridiano, e della rotazione lunare.

206. Qualora si osservi la Luna, o qualunque altro astro che abbia sensibile diametro, e moto proprio in *AR* ed in declinazione nel suo passaggio pel meridiano è necessario fare alle osservazioni alcune riduzioni tendenti a ricavare con precisione il vero istante del passaggio del suo centro, la corrispondente ascensione retta e declinazione. Noi supporremo pertanto che lo stromento dei passaggi ed il quadrante murale, ai quali si fa l'osservazione, siano ben disposti nel piano del meridiano, che nel foco dei loro cannocchiali siano tesi tre o cinque sottilissimi fili a due a due equidistanti dal filo medio rappresentante il vero meridiano, e che siasi preventivamente col mezzo dei passaggi di molte stelle equatoriali determinata la distanza di ciascuno di essi dal filo medio espressa in secondi di grado, la quale verrà da noi generalmente indicata per F, numero che dovrà riputarsi positivo se il filo è all'occidente del meridiano, negativo se trovasi all'oriente. Egli è prima di tutto palese, dietro quanto si è detto nella Trigonometria (oss. XVIII), che l'arco di equatore F in un parallelo di declinazione δ abbraccia una porzione di esso $= \frac{F}{\cos\delta}$, donde rendesi manifesto, che il tempo siderale impiegato da una stella fissa, la cui declinazione $= \delta$, a giungere dal filo meridiano al nominato filo laterale è $= \frac{F}{15\cos\delta}$.

207. Veniamo ora a ricercare il tempo siderale impiegato dal centro della Luna a passare dal filo meridiano in un filo laterale da esso distante di F; siano a tale oggetto α, δ, Δ l'AR, la declinazione, ed il semidiametro veduti dal centro della terra; α', δ', Δ' le stesse quantità vedute dalla superficie; $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\delta$, $d\delta'$ i loro incrementi in un secondo di tempo siderale. È palese, che in questo tempo si distaccherà la Luna dal meridiano per un arco di equatore $= 15'' - d\alpha'$, e perciò il tempo siderale impiegato a trascorrere lo spazio F in un parallelo di declinazione δ' in virtù della rotazione della sfera, sarà $= \dfrac{F}{(15'' - d\alpha')\cos\delta'}$, che porremo $= \tau$. Per determinare il valore di $d\alpha'$ osservo che la paralasse in AR si può ottenere dal § 177 cambiando l' in α', l in α, λ in δ, h in L, g in θ, come generalmente si avvertì al § 175. Avremo pertanto $\alpha' = \alpha + \dfrac{\pi \cos L \operatorname{sen}(\alpha' - \theta)}{\cos\delta}$. Differenziando questa equazione, e ponendo dopo la differenziazione $\alpha' - \theta = 0$, perchè si suppone la Luna nel meridiano, si avrà

$$d\alpha' = d\alpha + \frac{\pi\, d\alpha' \cos L}{\cos\delta} - \frac{\pi\, d\theta \cos L}{\cos\delta}.$$

Dovendosi introdurre questo valore di $d\alpha'$ in τ, il cui numeratore F è sempre una piccola quantità di primo ordine, si potrà trascurare il termine moltiplicato per $\pi\, d\alpha'$, che influisce soltanto nei termini di terzo ordine, che sono insensibili; inoltre essendo $d\theta$ la rotazione della sfera in un secondo, sarà $= 15''$; perciò più semplicemente avremo $d\alpha' = d\alpha - \dfrac{15''\pi \cos L}{\cos\delta}$. Introducendo in τ questo valore di $d\alpha'$, ponendo per brevità . . . $N = 15'' - d\alpha$ . . . (1)
sviluppando in serie, e trascurando i termini di terzo ordine, otterremo

$$\tau = \frac{F}{N\cos\delta'} - \frac{15\,\pi F \cos L}{N^2 \cos\delta \cos\delta'} = \frac{F}{N\cos\delta'} - \frac{\pi F \cos L}{N\cos^2\delta} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Si può ancora da questa equazione eliminare la declinazione apparente, ed introdurvi la declinazione vera. Chiamando in fatti z' la distanza apparente della Luna dal zenit nel meridiano, si avrà $\delta' = \delta - \pi \operatorname{sen} z'$, dove è palese che trascurando nell'equazione (2) le quantità di terzo ordine, potremo scrivere in luogo di z' la distanza vera z della Luna dal zenit. Quindi si formerà $\dfrac{1}{\cos\delta'} = \dfrac{1}{\cos\delta\,(1 + \pi \operatorname{sen} z \operatorname{tang}\delta)} = \dfrac{1 - \pi \operatorname{sen} z \operatorname{tang}\delta}{\cos\delta}$. Con ciò l'equazione (2) diverrà $\tau = \dfrac{F}{N\cos\delta} - \dfrac{\pi F}{N\cos^2\delta}[\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\delta + \cos(L - \delta + \delta)]$,

ovvero (a motivo di $L - d = z$) $\tau = \frac{F}{N \cos \delta} - \frac{\pi F \cos z}{N \cos \delta}$ . . (3)

formula semplicissima dovuta al signor Carlini per calcolare il tempo dalla Luna impiegato ad attraversare lo spazio F nel meridiano (*Effemeridi di Milano* 1825. *pag.* 42. *app.*).

Resta solo ad assegnare l'espressione di $d\alpha$ che entra in N; sia a tale oggetto A l'aumento dell'AR in 24^h di tempo solare medio presa da un'effemeride, nella quale per ogni giorno a mezzodì sia registrata la posizione vera della Luna. Siccome 24^h di tempo medio corrispondono a $24^h\, 4'$ di tempo siderale, sarà $d\alpha = \frac{1'' A}{24^h\, 4'}$, e se fingiamo A espresso in gradi e parti di grado, e $d\alpha$ in secondi di grado, si troverà facilmente $d\alpha = 0{,}04155\, A$; quindi sarà $N = 15'' - 0{,}04155\, A$.

208. Se pongasi $F = \Delta'$ (semidiametro apparente della Luna) diverrà τ il tempo che questo impiega ad attraversare il meridiano; ora (§ 164) $\Delta' = \Delta + \pi \Delta \cos z' = \Delta + \pi \Delta \cos z$ (trascurando cioè i termini di terzo ordine). Sarà pertanto il tempo richiesto per il passaggio del semidiametro apparente $= \frac{\Delta}{N \cos \delta}$, cioè *quello stesso che sarebbe relativo al passaggio del semidiametro vero veduto dal centro della terra,* come d'altronde è per se abbastanza palese.

Se si indica per b il tempo siderale osservato nell'appulso del primo lembo al filo laterale F, sarà stato il suo appulso al meridiano $= b - \tau$, e quindi il tempo corrispondente alla culminazione del centro sarà . . . $= b + \frac{\Delta - F}{N \cos \delta} + \frac{F \pi \cos z}{N \cos \delta}$ . . . (4)

Coroll. Se saranno stati osservati i fili equidistanti dal meridiano, come il più delle volte accade, potremo dispensarci dall'aver riguardo al computo delle paralassi; in fatti chiamando b' l'appulso al filo distante dal meridiano di $-F$, sarà il passaggio del centro $= b' + \frac{\Delta + F}{N \cos \delta} - \frac{F \pi \cos z}{N \cos \delta}$, e quindi la semisomma di questo col precedente darà ancora il passaggio del centro, il quale sarà perciò $= \frac{1}{2}(b + b') + \frac{\Delta}{N \cos \delta}$, indipendente, come apparisce, dalle correzioni dovute alle paralassi.

Scolio. Noi abbiamo supposto che venisse osservato l'appulso del primo lembo, ossia del lembo occidentale. Se venisse invece osservato il lembo orientale, le formule precedenti daranno il passaggio del centro ponendo $-\Delta$ in luogo di Δ. Che se poi si fossero osservati

gli appulsi e le sortite, la semisomma di un appulso con una sortita dai fili equidistanti darà il passaggio del centro pel meridiano senza alcun riguardo alla paralasse, o alla grandezza del diametro, poichè queste quantità si distruggono nelle semisomme indicate, come è per se abbastanza palese. Questo metodo viene tuttodì praticato per il Sole e per i pianeti superiori; per la Luna, Venere e Mercurio, i quali il più delle volte sono falcati, ed hanno perciò un lembo invisibile, non può essere messo in opera, ed allora conviene avere necessariamente ricorso alle correzioni indicate, nel calcolo delle quali basterà prendere dalle Effemeridi il moto in AR, la declinazione ed il semidiametro dell' astro osservato.

209. Mentre allo stromento dei passaggi osservasi l'AR del centro di S, al quadrante murale un altro osservatore determina d'ordinario la distanza di uno dei lembi o superiore od inferiore dal zenit, donde poi convien dedurre la declinazione vera del centro: ovvero, se siavi un solo osservatore, dopo avere osservato gli appulsi di S ai fili dello stromento dei passaggi, si farà prestamente ad osservare la distanza di uno dei lembi di S dal zenit, che egli otterrà ponendolo in contatto del filo orizzontale normale al filo meridiano. Se questo contatto segue nell' intersezione del filo meridiano col filo orizzontale, nel qual caso il centro stesso trovasi nel meridiano, allora si applicherà alla distanza osservata la paralasse di altezza, e la rifrazione corrispondente, e si otterrà la distanza vera del lembo dal zenit, alla quale aggiungendo o togliendo il semidiametro orizzontale dato dalle tavole, si ha la distanza vera del centro dal zenit, donde poi formerassi la declinazione.

Se poi il contatto del lembo non seguirà nel centro del cannocchiale, ma in una distanza φ dal medesimo corrispondente ad un angolo orario $= a$, in allora oltre le indicate correzioni ve ne saranno altre due. La prima, che nel caso della Luna è anche la più forte, dipende dal suo moto proprio in declinazione. Se supponiamo che questa vada aumentando, la distanza meridiana sarà maggiore di quella che osservasi poco dopo il passaggio pel meridiano, e quindi dovrassi aumentare la distanza osservata al tempo a dopo il passaggio di una quantità uguale al suo cambiamento in declinazione.

Per comprendere l'indole della seconda correzione convien riflettere, che le divisioni lette sul lembo del quadrante murale danno la distanza dal zenit del punto d'intersezione del filo orizzontale col meridiano. Mentre adunque S trovasi in una distanza φ dal filo meridiano valutata nel filo orizzontale, la distanza dell' astro dal polo sarà l'ipotenusa di un triangolo sferico rettangolo, i cui lati sono φ, e $90 - (L - z)$, L essendo la latitudine, z la distanza osservata dal zenit. Quindi se indichiamo per δ la declinazione del punto osser-

vato, sarà $90 - \delta$ la nominata ipotenusa, e perciò
$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(L - z)\cos\varphi = \operatorname{sen}(L - z) - \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{sen}(L - z)$, a motivo della piccolezza di φ. Se ora rappresentiamo per d l'istante dell'osservazione, per c quello del passaggio già calcolato del centro, sarà l'angolo orario $a = N(d-c)$, e perciò $\varphi = a\cos\delta = N(d-c)\cos(L-z)$ trascurando le quantità di terzo ordine. Quindi otterrassi
$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(L - z) - \frac{1}{2}N^2(d - c)^2\cos^2(L - z)\operatorname{sen}(L - z)$, donde si avrà con facile sviluppo $\delta = L - z - \frac{1}{2}N^2(d-c)^2\cos(L-z)\operatorname{sen}(L-z)$.
Da quanto abbiamo detto raccogliesi, che indicando la rifrazione per r, la paralasse orizzontale per π, il semidiametro per Δ, il moto dell'astro in declinazione preso dall'Effemeridi per un secondo di tempo $= D$, avremo dalla distanza osservata z la declinazione del centro colla seguente equazione

$$\delta = L - z - r + \pi\operatorname{sen} z \pm \Delta + (d - c)D - \frac{N^2}{4}\frac{(d-c)^2}{R''}\operatorname{sen} 2(L - z),$$

ove dividesi l'ultimo termine per R'' ad oggetto di ridurlo a secondi di grado, R'' essendo al solito il numero dei secondi contenuti nel raggio. Si prenderà il segno superiore, se siasi osservata la distanza dal zenit del lembo inferiore, e viceversa.

Rotazione della Luna intorno al suo asse.

210. Abbiamo già esposto al capitolo X che la Luna osservata con forti cannocchiali presentava delle grandi irregolarità alla sua superficie, le quali annunziavano l'esistenza in essa di alte montagne e crateri. Se ora diligentemente si prendano a seguire le posizioni di queste irregolarità, non tarderemo ad accorgerci che la Luna rivolge sempre verso la terra la medesima faccia, giacchè i suoi monti e crateri conservano costantemente quasi sempre la stessa posizione rapporto al suo centro apparente. Risulta da ciò che essa oltre il suo moto di traslazione, in virtù di cui da occidente in oriente compie la sua rivoluzione intorno alla terra, è animata eziandio da un moto di rotazione intorno ad un asse che passa per il suo centro, la quale si compie in un tempo uguale a quello della sua rivoluzione periodica. In fatti se dal centro della terra al centro della Luna fingiamo continuamente condotta una linea retta, qualora non fosse la Luna animata da alcun moto di rotazione, dovrebbe questa linea incontrare la sua superficie in punti sempre differenti, dimodochè in una rivoluzione sinodica essa l'avrebbe tagliata lungo una circonferenza. Se adunque questa linea incontra la Luna sempre in un medesimo punto, è forza che di quanto questa si avanza nella sua orbita intorno alla terra verso oriente, di altrettanto quello proceda pure verso oriente intorno al centro della Luna, seguendo così il moto della linea nello

spazio. È dunque animata la Luna da un movimento di rotazione intorno ad un asse condotto per il suo centro, la cui velocità angolare sarà uguale alla sua media celerità intorno alla terra.

211. Gli stessi metodi che nel capitolo IX seguito abbiamo per determinare la posizione dell'equatore solare, ed il tempo della sua rotazione, si applicano con piccolissime modificazioni anche alla Luna. Daremo nel § seguente le regole adattate a questo caso speciale: frattanto, per non dover più tornare sopra questo argomento, faremo qui brevemente parola di alcune oscillazioni che si osservano nella posizione delle macchie lunari rapporto al centro della Luna, in virtù delle quali sembrano esse ora allontanarsi, ed ora avvicinarsi al suo centro, manifestando alcune piccole oscillazioni tanto in longitudine quanto in latitudine, alle quali si è dato il nome di *librazione*. Galileo fu il primo ad accorgersi di questi movimenti libratorj, e ne diede una plausibile spiegazione; ma la loro vera teoria devesi al celebre la Grange, il quale nelle sue *Recherches sur la libration de la Lune* (Memoria che riportò il premio dall'Accademia delle scienze di Parigi nel 1764) presentò ai Geometri le formule generali di questi moti oscillatorj, deducendole dalle formule generali di meccanica pei movimenti rotatorj, richiamando a calcolo tutte le forze di attrazione, che possono far oscillare la Luna intorno al suo centro di gravità.

I movimenti libratorj che osservano gli Astronomi nelle macchie lunari si riducono principalmente a tre, ai quali danno essi il nome di *librazione diurna, librazione in longitudine,* e *librazione in latitudine*. Per rendere ragione di queste oscillazioni supporremo che il moto rotatorio della Luna si faccia intorno ad un asse inclinato all'asse dell'ecclittica di circa 2.°, e che sia esso uniforme, come generalmente sappiamo accadere nei movimenti rotatorj degli altri corpi celesti.

In primo luogo è manifesto, che se ponghiamo due osservatori, uno situato al centro della terra, e l'altro alla superficie, i quali contemplino la Luna, quantunque presentasse questa nel corso della diurna rivoluzione sempre la stessa faccia al centro della terra, non sarebbe così per l'osservatore situato alla superficie. In fatti condotti due raggi dai due osservatori al centro della Luna, comprenderanno questi un angolo uguale alla paralasse lunare, e quindi i piani ad essi perpendicolari, che determinano l'emisfero a ciascun osservatore visibile, comprenderanno fra loro lo stesso angolo. Mentre adunque il piano perpendicolare alla linea dei centri passa continuamente per gli stessi punti del globo lunare, l'altro rapporto a quello varia ad ogni istante per la variazione della paralasse diurna, discuoprendo e nascondendo così ai confini dell'emisfero visibile alla superficie terrestre delle nuove macchie. In particolare chiaramente si vede, che ad oriente alla superficie terrestre si vedranno verso il lembo superiore delle macchie

invisibili al centro, le quali andranno ascondendosi a proporzione che la Luna si eleva sull' orizzonte, e se ne scuopriranno allora verso il lembo inferiore delle nuove, che erano prima invisibili. Dopo il passaggio pel meridiano accaderà il contrario. Questa librazione è dunque una pura apparenza, che sparirebbe al centro della terra.

In secondo luogo ravvolgendosi uniformemente la Luna intorno al suo asse di rivoluzione, ed essendo nella sua rivoluzione tropica intorno alla terra sottoposta a grandi disuguaglianze si concepisce facilmente, che il raggio vettore condotto dal centro della terra alla Luna è sottoposto nella sua rivoluzione a tutte queste disuguaglianze, e perciò un punto speciale della superficie lunare, che muovesi con moto uniforme, ci sembrerà da quello allontanarsi nel senso delle longitudini, mentre il moto diurno lunare è minore del moto medio, il contrario accadendo quando il moto diurno è maggiore del medio. Quindi le macchie situate verso i lembi occidentale o orientale della Luna avranno un moto libratorio in longitudine, in virtù di cui talvolta si avvicineranno al centro, e talvolta se ne allontaneranno per isparire ancora se siano in gran vicinanza dei medesimi.

In terzo luogo per concepire come segua la librazione in latitudine, rappresenti T (*Fig.* 59) il centro della terra, TE il piano dell' eclittica, TL l' orbita lunare inclinata all' eclittica circa 5°, TC il piano dell' equatore lunare inclinato solo 2°. Sia la Luna (mentre passa al meridiano) in L avendo una latitudine boreale di 5°, e ravvolgasi intorno all' asse LK perpendicolare all' equatore lunare. Condotta AGL paralella a TC, rappresenterà questa la traccia dell' equatore lunare, ed un suo punto G apparirà distante dal centro apparente di una quantità GD che sottende verso il nord un angolo $GLD = 3°$. Dopo 14 o 15 giorni la Luna ritornando al meridiano in M con una latitudine australe di 5°, la traccia dell' equatore è nella linea QMH paralella a TC, il punto G trovasi in Q distante dal centro apparente F di un arco $= QF$ che sottende 7° nel centro della Luna verso il sud. Questo punto, e quindi tutti gli altri hanno avuto un moto, in virtù di cui sonosi trasportati dal nord al sud di un arco uguale a 10° del disco lunare, vale a dire le macchie sembrano essersi avanzate verso il sud di una nona parte del semidiametro apparente. In seguito la latitudine della Luna ritornando indietro per gli stessi gradi, le macchie tornano pure al nord per gli stessi gradi, mostrandoci quel moto apparente oscillatorio dal nord al sud che abbiamo definito per *librazione in latitudine*.

Questi sono i principali movimenti apparenti delle macchie lunari. Tralascio di noverarne alcuni altri dipendenti dalla figura sferoidica della Luna, rimandando per questi ultimi, e per le formule generali, che rappresentano tutte le librazioni, alla citata Memoria del signor

la Grange, ed al secondo volume della Meccanica celeste del signor la Place.

212. Resta ora che qualche cosa diciamo intorno al modo di determinare la rotazione della Luna dalle posizioni osservate delle macchie lunari. Si principierà pertanto dall' osservare giornalmente nel tempo del suo passaggio pel meridiano la differenza apparente di *AR* e di declinazione di una macchia col centro della medesima: quindi mediante le formule (E) del § 66 si determinerà la differenza di longitudine e di latitudine della macchia col centro della Luna, dalle quali con metodi analoghi a quelli spiegati per il Sole nel § 119 si dedurranno le sue longitudini e latitudini vedute dal centro lunare, che appellate vengono *selenocentriche*.

Qualora poi siansi dietro le osservazioni determinate in più giorni le longitudini e latitudini selenocentriche di una stessa macchia, con i metodi esposti per il problema analogo della rotazione solare, si otterrà la posizione dell' equatore lunare, e la durata della sua rivoluzione, fra i quali quello del § 124 deve essere a preferenza messo in opera, in quanto che si può far concorrere col suo mezzo un numero indefinito di osservazioni alla determinazione delle incognite del problema. Sommamente rimarchevoli sono i risultamenti, ai quali si è pervenuto ricercando dietro questi precetti la posizione dell' equatore ed il tempo della rotazione lunare, poichè oltre essersi trovato questo uguale alla media durata della rivoluzione periodica intorno alla terra, i nodi dell' equatore lunare coincidono sempre con la media posizione dei nodi dell' orbita, mentre la sua inclinazione all' ecclittica è costante ed $= 1^\circ\ 30'$ circa. Pertanto i nodi dell' equatore lunare avranno un moto medio retrogrado uguale a quello dei nodi dell' orbita, di cui terremo conto nelle formule del § 124 nel modo seguente. Rappresentando, come nel luogo citato, δ, λ, l, i la declinazione, latitudine, longitudine selenocentrica di una macchia e l' inclinazione dell' equatore lunare, sia Ω la longitudine del suo nodo ad un' epoca stabilita, ed m il moto retrogrado del medesimo fra l' epoca scelta e l' osservazione, cosicchè la sua longitudine sia $\Omega - m$; l' equazione (1) diverrà

$$\text{sen}\,\delta = \cos i\ \text{sen}\,\lambda - \text{sen}\,i \cos\lambda\ \text{sen}\,(l + m - \Omega),$$

la quale, poichè $l + m$ è noto, ammetterà gli stessi ragionamenti, ed allo stesso modo porgerà i valori delle incognite δ, i, Ω.

213. Sebbene con le formule citate del § 119 si possono con facilità dedurre le longitudini e latitudini selenocentriche di una macchia dalle longitudini e latitudini osservate alla superficie della terra, pure crediamo bene di qui riferire alcune formule generali, le quali si potranno con molta facilità applicare a tutti i simili casi.

Noi supporremo pertanto che per il luogo dell' osservatore e per il centro della Luna sieno condotti due piani paralelli al piano dell' ec-

eclittica, ed a questi riferiremo le posizioni della macchia e del centro della Luna mediante coordinate rettangole x, y, z, prendendo le x sulla linea paralella alla linea dell' equinozio di primavera; le y sulla sua perpendicolare nel piano dell' ecclittica, considerandola diretta ad oriente; e le z sulla linea paralella all' asse dell' ecclittica, assumendole positive quando sono rivolte al nord.

Ciò posto, le coordinate del centro della Luna rapporto all' osservatore siano x, y, z; quelle della macchia x', y', z'; la distanza del centro della Luna dall' osservatore sia $= d$; della macchia $= d'$; le coordinate selenocentriche della macchia siano X, Y, Z.

Il semidiametro apparente della Luna espresso in secondi sia $= \delta$; il suo raggio $= R$. Si rappresenti inoltre la longitudine e latitudine apparente della Luna per l, λ; le quantità corrispondenti osservate per la macchia per l', λ'; la longitudine selenocentrica della macchia per p; la sua latitudine per q. Dietro i ragionamenti fatti nel § 64 avremo

$$x = d \cos l \cos \lambda\,; \quad x' = d' \cos l' \cos \lambda'\,; \quad X = R \cos p \cos q$$
$$y = d \operatorname{sen} l \cos \lambda\,; \quad y' = d' \operatorname{sen} l' \cos \lambda'\,; \quad Y = R \operatorname{sen} p \cos q$$
$$z = d \operatorname{sen} \lambda\,; \quad z' = d' \operatorname{sen} \lambda'\,; \quad Z = R \operatorname{sen} q\,.$$

Ora si ha evidentemente $X = x' - x$; $Y = y' - y$; $Z = z' - z$. Sostituendo, si avranno le seguenti tre equazioni, donde si dovranno ricavare le incognite p, q, d'.

$$(1)\ R \cos p \cos q = d' \cos l' \cos \lambda' - d \cos l \cos \lambda\,;$$
$$(2)\ R \operatorname{sen} p \cos q = d' \operatorname{sen} l' \cos \lambda' - d \operatorname{sen} l \cos \lambda\,;$$
$$(3)\ R \operatorname{sen} q = d' \operatorname{sen} \lambda' - d \operatorname{sen} \lambda\,;$$

alle quali conviene aggiungere l' altra $R = d\,\delta$.

Se si sommano i quadrati delle prime tre, avremo

$$R^2 = d'^2 - 2\,d\,d' \left[\cos \lambda \cos \lambda' \cos (l' - l) + \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \lambda'\right] + d^2,$$

donde, ponendo $\cos \psi = \cos \lambda \cos \lambda' \cos (l' - l) + \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \lambda' \ldots (a)$
otterremo

$$(b)\ d' = d \cos \psi - \sqrt{(R^2 - d^2 \operatorname{sen}^2 \psi)}\,.$$

Il radicale dovrebbe invero avere il segno $\pm$; noi abbiamo scelto il segno $-$, perchè la macchia essendo sempre nell' emisfero a noi rivolto è meno distante del centro della Luna. Rapporto a queste equazioni io osservo che sarà sempre ψ un piccolo arco tutto al più uguale al semidiametro apparente della Luna. In fatti l' equazione (a), ponendo $\cos (l' - l) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (l' - l)$, si può scrivere sotto la forma $\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \psi = \cos \lambda \cos \lambda' \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (l' - l) + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\lambda' - \lambda)$, che a motivo di $l' - l$, $\lambda' - \lambda$ quantità piccole si riduce a

$$(a)'\quad \psi^2 = (l' - l)^2 \cos^2 \lambda + (\lambda' - \lambda)^2,$$

trascurando cioè le quantità di terzo ordine. Parimente l' equazione (b) divisa per d, a motivo di $\dfrac{R}{d} = \delta$, diviene $\dfrac{d'}{d} = \cos \psi - \sqrt{(\delta^2 - \operatorname{sen}^2 \psi)}$.

Dividendo ora le equazioni (1), (2), (3) per d, e ponendo in luogo di $\frac{d'}{d}$, $\frac{R}{d}$ i loro valori, avremo

$$\delta \cos q \cos p = \cos \psi \cos \lambda' \cos l' - \cos \lambda \cos l - \cos \lambda' \cos l' \sqrt{(\delta^2 - \operatorname{sen}^2 \psi)}$$
$$\delta \cos q \operatorname{sen} p = \cos \psi \cos \lambda' \operatorname{sen} l' - \cos \lambda \operatorname{sen} l - \cos \lambda' \operatorname{sen} l' \sqrt{(\delta^2 - \operatorname{sen}^2 \psi)}$$
$$\delta \operatorname{sen} q = \cos \psi \operatorname{sen} \lambda' - \operatorname{sen} \lambda - \operatorname{sen} \lambda' \sqrt{(\delta^2 - \operatorname{sen}^2 \psi)}.$$

Se ora la prima equazione moltiplicata per sen l' si toglie dalla seconda moltiplicata per cos l'; e se si sommano insieme la prima e seconda moltiplicate rispettivamente per cos l', sen l' formeremo le due seguenti

$$\delta \cos q \operatorname{sen} (p - l') = \cos \lambda \operatorname{sen} (l' - l);$$
$$\delta \cos q \cos (p - l') = \cos \psi \cos \lambda' - \cos \lambda \cos (l' - l) - \cos \lambda' \sqrt{(\delta^2 - \operatorname{sen}^2 \psi)}.$$

Svolgendo in serie i secondi membri di queste equazioni, e trascurando le terze potenze di $l' - l$, $\lambda' - \lambda$, ψ come piccolissime, diverranno $\delta \cos q \operatorname{sen} (p - l') = (l' - l) \cos \lambda$;

$$\delta \cos q \cos (p - l') = (\lambda - \lambda') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) - \tfrac{1}{2}\psi^2 \cos \lambda' + \tfrac{1}{2}(l' - l)^2 \cos \lambda - \cos \lambda' \sqrt{(\delta^2 - \psi^2)},$$

nell' ultima delle quali in luogo dei due termini $- \tfrac{1}{2}\psi^2 \cos \lambda' + \tfrac{1}{2}(l' - l)^2 \cos \lambda$ si può senza errore scrivere (avendo riguardo all' equazione $(a)'$) $- \frac{(\lambda' - \lambda)^2}{2 \cos \lambda} + \frac{\psi^2 \operatorname{sen}^2 \lambda}{2 \cos \lambda}$, ovvero anche $- \frac{(\lambda' - \lambda)}{2 \cos \lambda}$.

Svolgendo quindi in serie eziandio la terza equazione, e dividendo i termini di secondo ordine per R'' (numero dei secondi contenuti nel raggio ad oggetto di rendere le equazioni omogenee) avremo per calcolare p, q dietro le differenze osservate di longitudine e latitudine le seguenti equazioni

$$(a)' \quad \psi = \sqrt{[(l' - l)^2 \cos^2 \lambda + (\lambda' - \lambda)^2]}$$
$$(b)' \quad \delta \cos q \operatorname{sen} (p - l') = (l' - l) \cos \lambda$$
$$(c)' \quad \delta \cos q \cos (p - l') = (\lambda - \lambda') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) - \cos \lambda' \sqrt{[(\delta - \psi)(\delta + \psi)]} - \frac{(\lambda' - \lambda)^2}{2 R'' \cos \lambda}$$
$$(d)' \quad \delta \operatorname{sen} q = (\lambda' - \lambda) \cos \tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) - \operatorname{sen} \lambda' \sqrt{[(\delta - \psi)(\delta + \psi)]} - \frac{\psi^2 \operatorname{sen} \lambda'}{2 R''}$$

nell'ultima delle quali il termine $\frac{\psi^2 \operatorname{sen} \lambda'}{2 R''}$ si può trascurare come piccolissimo. Queste equazioni daranno sempre i valori, e la specie di p e q con molta speditezza, e senza alcuna indeterminazione, qualora si osservi che q è sempre compreso fra $+ 90°$, e $- 90°$.

CAPITOLO XVI.

Teoria dei pianeti. Fenomeni generali del moto dei pianeti. Esposizione del sistema Copernicano.

214. Dopo di avere esposto la teoria del Sole e della Luna, l'ordine naturale richiede che si passi alla teoria dei pianeti, così appellati dalla parola greca πλανήτης, che significa errante. Abbiamo già detto al § 8 che essi si distinguono dalle stelle fisse per un loro moto proprio, in virtù di cui vanno percorrendo in vario tempo il cielo stellato corrispondendo successivamente a diverse longitudini, ed a diverse latitudini, trovandosi vicini a stelle sempre differenti.

La teoria dei loro movimenti forma una delle parti più importanti ed insieme più difficili dell'Astronomia. I limiti di quest'opera non ci permettono di entrare in discussioni troppo lunghe e profonde su questo argomento; perciò dovremo contentarci d'indicare come col mezzo delle osservazioni siensi potuti gli Astronomi innalzare alla cognizione delle loro orbite, ed involare alla natura il secreto, col quale sembra abbia voluto celare agli occhi nostri le belle leggi, dalle quali sono i loro moti retti e moderati. Per servire alla brevità eviteremo di riferire la storia d'altronde interessantissima delle diverse opinioni dello spirito umano sul sistema del mondo, e dei diversi passi ora diretti, ed ora retrogradi tendenti allo sviluppo della loro teoria. Rimandando per questa gli studiosi ad opere più voluminose, principieremo dal riferire brevemente quei dati d'osservazione, dai quali partiremo per l'investigazione delle orbite da loro percorse nell'immensità dello spazio. Ma prima daremo le definizioni di alcuni vocaboli usati dagli Astronomi nella descrizione delle osservazioni e movimenti planetarj.

1.° Allorquando un corpo celeste si muove per modo che la sua longitudine nell'ecclittica vada da un istante all'altro aumentando, dicesi *diretto secondo l'ordine dei segni*, o semplicemente *diretto*. Se la sua longitudine rimane invariabile per più istanti consecutivi, allora appellasi *stazionario*, ed i punti ove ciò si osserva, si chiamano *punti delle stazioni*. Se per ultimo la sua longitudine da un istante all'altro va diminuendo appellasi *retrogrado*, ed il suo movimento dicesi *diretto contro l'ordine dei segni*.

2.° Appellasi *moto geocentrico di un pianeta* in longitudine, in latitudine, in *AR* ed in declinazione quella quantità, di cui vanno giornalmente variando le longitudini, latitudini, *AR* e declinazioni osservate dal centro della terra, i quali moti si riguardano come positivi

se tendono ad aumentare, negativi se a diminuire le rispettive loro posizioni.

3.° Quando le longitudini del Sole e di un pianeta veduto dalla terra sono uguali, qualunque sia la latitudine del pianeta, o in altri termini quando i centri del Sole, del pianeta e della terra si trovano in uno stesso piano perpendicolare all'eclittica, allora dicesi che il pianeta trovasi *in congiunzione col Sole*. Se la distanza lineare del pianeta dalla terra è maggiore di quella del Sole, dicesi in una *congiunzione superiore*, ed in una *congiunzione inferiore* nel caso opposto.

4.° Se le longitudini geocentriche del pianeta e del Sole differiscono di 180°, cioè se i centri del Sole, della terra, e la projezione del pianeta nel piano dell'eclittica sono situati in una linea retta, allora dicesi che il pianeta è in opposizione col Sole, corrispondendo egli di fatto a punti opposti nel cielo stellato.

5.° Se supponiamo trasportato un osservatore nel centro del Sole, e che di là egli osservi le posizioni dei corpi celesti riportandole all'eclittica, le longitudini e latitudini ivi osservate si appellano *eliocentriche*.

6.° La differenza delle longitudini eliocentriche della terra e di un pianeta viene appellata *angolo di commutazione*, il quale se è di 90° pone il pianeta in quell'aspetto nominato *quadratura*.

7.° La differenza delle longitudini geocentriche di un pianeta e del Sole chiamasi *angolo di elongazione*.

215. Passiamo ora all'esposizione dei fenomeni osservati nel moto dei pianeti, e principiamo dalle

Apparenze di Mercurio e di Venere.

Le apparenze che s'incontrano nei movimenti di questi due pianeti, essendo presso a poco le stesse, esamineremo quelle di Venere, dovendosi istituire un esame simile rapporto a Mercurio.

Noi supporremo una serie illimitata di osservazioni di Venere, nella quale di giorno in giorno siensi registrate le ascensioni rette e declinazioni, e siensi quindi dedotte le longitudini e latitudini geocentriche di questo pianeta. A lato delle stesse si scriva il suo diametro apparente, e la sua apparente figura. Per ultimo vi s'inseriscano eziandio le longitudini corrispondenti del Sole, dedotte o dalle osservazioni, o dalle tavole.

Esaminandone da principio il diametro apparente si scuoprirà sottoposto a notabili cambiamenti, ed a fasi aventi molta analogia con quelle della Luna. Le longitudini geocentriche sono pure sottoposte a notabili variazioni. Generalmente parlando esse aumentano da un giorno

all' altro, ed annunziano nel pianeta un movimento diretto da occidente verso oriente. Le sue latitudini ora sono boreali ed ora australi: e siccome le massime latitudini boreali uguagliano all' incirca le massime latitudini australi, così l' orbita apparente per il cielo stellato sarà un circolo massimo, di cui dovrassi determinare la posizione rapporto all' ecclittica.

Confrontando le longitudini di Venere con le corrispondenti longitudini del Sole si vedrà che l' elongazione massima di Venere non oltrepassa i 48°, ed allora si presenta falcata. Nelle sue massime elongazioni la longitudine di Venere è talora minore, e talora maggiore di quella del Sole, cioè essa trovasi alternativamente all' occidente ed all' oriente rapporto al Sole. La quantità della massima elongazione non è sempre la stessa, ma è compresa fra 44° 57′ e 47° 18′.

Verso i punti delle massime elongazioni il moto giornaliero di Venere in longitudine è piccolissimo. Essa sembra allora quasi stazionaria. Passando dalla massima elongazione occidentale alla massima elongazione orientale il suo moto diurno si va aumentando, e si aumenta pure la porzione illuminata del suo disco fino a che essendo vicinissima alla sua congiunzione col Sole essa comparisce perfettamente rotonda, ove il suo moto diurno acquista il più gran valore. Si perde allora per pochi giorni nei raggi del Sole, sembra quasi nascondersi dietro di esso, donde sorte continuando a trasportarsi verso oriente per passare alla sua massima digressione orientale. Liberandosi dai raggi del Sole il moto diurno va di giorno in giorno diminuendo, il suo disco apparente va mancando, finchè arrivata alla digressione orientale di nuovo comparisce falcata sotto l' aspetto di mezzo circolo illuminato. Arrivata in questo punto apparisce di nuovo stazionaria, ed in seguito il moto diurno, che fino allora era stato diretto, apparisce retrogrado. La sua fase luminosa diminuisce giornalmente in un con la elongazione, finchè essendosi molto avvicinata alla sua congiunzione col Sole si rende invisibile, il moto diurno retrogrado va aumentando fino a divenire massimo nelle vicinanze della sua congiunzione. Accade talvolta che Venere si veda attraversare il disco apparente del Sole in forma di una macchia rotonda dotata di un moto retrogrado uguale all' incirca a quello che aveva nei giorni precedenti. Allontanandosi poscia continuamente dal Sole, ricomparisce di nuovo verso l' occidente; il moto diurno retrogrado va diminuendo, la sua fase luminosa e la sua elongazione occidentale aumentano di nuovo, finchè giunta alla sua massima digressione occidentale principiano a presentarsi le stesse apparenze. In ogni sua posizione le punte luminose sono sempre opposte al Sole.

Si vede chiaramente dai fatti riferiti 1.° che Venere è un corpo sferico opaeo, e soltanto a noi visibile per la luce solare che egli ri-

flette; 2.° che si ravvolge in un'orbita rientrante intorno al Sole da occidente verso oriente; 3.° che la sua distanza dal Sole rimane sempre minore di quella della terra dal Sole, onde accade che egli si trovi talora in congiunzione superiore, talora in congiunzione inferiore. Nelle congiunzioni superiori egli apparir deve diretto, nelle inferiori retrogrado, come apertamente si vede dalla ispezione della *figura* 47, nella quale si suppone S il centro del Sole, T quello della terra, $V\,V'\,V''\,V'''$ l'orbita di Venere da essa percorsa da occidente verso oriente. Nelle sue massime digressioni in $V\,V''$ apparir deve presso che stazionaria; diretta e pienamente illuminata nelle sue congiunzioni superiori in V'; retrograda e falcata quando percorre l'arco $V''\,V'''\,V$: invisibile, e talvolta sul Sole quando si trova nella congiunzione inferiore V'''. Essa apparirà projettata sul disco solare se la sua latitudine in V''' sarà minore del semidiametro solare.

Quanto poi alla figura dell'orbita stessa, non può essere gran fatto diversa da un circolo, avvegnacchè, qualunque posizione si abbia il Sole nell'ecclittica, le più gran digressioni di $S\,T\,V$, $S\,T\,V''$ non sono molto dall'uguaglianza lontane. Ponendo l'orbita di Venere circolare, e supponendo $S\,T = 1$, sarà $S\,V = S\,V'' = \text{sen}\ S\,T\,V$. Ora essendo $S\,T\,V$ compreso fra i limiti $44^\circ\ 57'$, $47^\circ\ 18'$, per un medio stabiliremo $S\,T\,V = 46^\circ\ 8'$. Quindi $S\,V = 0,72$.

216. Le apparenze nei moti di Mercurio sono le stesse di quelle di Venere; se non che le sue massime elongazioni dal Sole essendo minori, più difficili si rendono le sue osservazioni senza buoni *cannocchiali*, essendo quasi sempre immerso nella viva luce che lascia intorno a se il Sole. Le massime elongazioni di Mercurio sono comprese in limiti più distanti di quelli di Venere, variando da $17^\circ\ 36'$ fino $28^\circ\ 20'$, ed essendo nel loro medio valore $22^\circ\ 58'$. Mercurio pertanto si muoverà intorno al Sole in un'orbita rientrante, alcun poco dal circolo diversa. Essa sarà compresa dentro l'orbita di Venere, e la sua distanza media dal Sole sarà incirca $= \text{sen}\ 22^\circ\ 58' = 0,39$, supposta la distanza della terra dal Sole come sopra $= 1$.

Mercurio e Venere, rimanendo in tutte le loro posizioni rapporto al Sole sempre ad esso più vicini della terra, vengono appellati *pianeti inferiori*.

Fenomeni osservati nei moti di Marte, Giove, Saturno ed Urano; e nei nuovi piccolissimi pianeti Cerere, Giunone, Pallade e Vesta.

217. Molto dai precedenti differiscono i fenomeni osservati nel moto di questi pianeti; essendo però in tutti gli stessi, così analizzeremo quelli di Marte, dovendosi per gli altri stabilire i medesimi ragionamenti.

Supporremo pertanto di avere una serie illimitata di osservazioni di Marte ordinata come quella assunta per Venere. In primo luogo facilmente vedremo, che le sue longitudini e latitudini vanno giornalmente variando in modo, che nello spazio di 23 mesi all'incirca egli da occidente in oriente ha percorso i 360° dell'ecclittica, corrispondendo successivamente alle costellazioni tutte del Zodiaco.

La sua latitudine è talora boreale, talora australe: durante una metà della sua rivoluzione essa è boreale, restando australe per l'altra metà. I punti, nei quali la latitudine di boreale diviene australe, e di australe ritorna boreale corrispondono a longitudini differenti all'incirca di 180°, ed essendo la massima latitudine boreale uguale alla massima australe, se ne può di già inferire, che la sua orbita è una curva rientrante situata nel piano di un circolo massimo della sfera celeste non molto inclinato all'ecclittica, poichè le sue latitudini australi e boreali si mantengono sempre abbastanza piccole.

Confrontando le posizioni osservate di Marte con quelle del Sole, si noteranno i seguenti fenomeni: 1.° Marte non è sottoposto a fasi così varie come Venere e Mercurio. 2.° La sua elongazione non è ristretta in limiti angusti, come quella di Venere, ma passa successivamente per tutti gli angoli da 0° fino a 360°. 3.° Marte si trova alternativamente in opposizione ed in congiunzione col Sole, passando nel primo caso al meridiano verso la mezza notte, e nel secondo verso mezzogiorno. 4.° Il diametro apparente di Marte è maggiore verso le opposizioni, che verso le congiunzioni, onde deducesi essere nel primo caso più vicino alla terra, che nel secondo. 5.° Il suo disco non apparisce perfettamente rotondo, ma oblongo verso le quadrature: dal che si può dedurre, che egli è un corpo opaco soltanto a noi visibile in quanto che egli è illuminato dal Sole; e siccome non è sottoposto a fasi, come quelle di Venere, nè mai sparisce per l'osservatore della terra, così se ne può tosto inferire che l'orbita da lui percorsa comprende dentro di se nello spazio il Sole e la terra. Egli è appunto per ciò che la sua elongazione non è ristretta a limiti determinati, ma passa successivamente per tutti i valori dei quattro retti della circonferenza. 8.° Tutte le volte che Marte trovasi in opposizione egli ha un moto retrogrado, il quale va diminuendo, mentre si allontana dall'opposizione fino a ridursi = 0 verso le quadrature; sembra allora per qualche giorno stazionario; quindi il suo moto diurno volgesi in moto diretto, da principio piccolissimo; va in seguito crescendo avvicinandosi alla congiunzione superiore, ove ha il massimo moto diurno diretto; passata la congiunzione il suo moto diurno diminuisce, finchè verso l'altra quadratura apparisce di nuovo stazionario per ritornare retrogrado nell'avvicinarsi alla sua opposizione.

218. Le stesse apparenze all'incirca si presentano nel moto degli

altri pianeti; esse da queste non differiscono che nella durata delle retrogradazioni, dei movimenti diretti, e delle loro rivoluzioni attorno al cielo stellato.

Si può dedurre da tutto ciò che le orbite dei pianeti superiori sono curve, piane, rientranti, situate in diversi piani più o meno a quello dell' ecclittica inclinati, e che la forza centripeta, la quale trattiene questi corpi nelle loro orbite non è certamente diretta verso la terra. Essendosi già dimostrato che Venere e Mercurio si ravvolgono intorno al Sole, sarà questo probabilmente il centro dei movimenti tutti planetarj. Varj Filosofi dell' antichità adottarono già questo sistema; ma al celebre Copernico siamo debitori di avere felicemente con solidi argomenti, e con un esame accurato delle osservazioni dimostrato questa verità, e di aver riprodotto un' ipotesi, la quale per la felicità con cui spiega tutti i fenomeni osservati, per la sua congruenza con i principj meccanici, e per la sua semplicità si eleva al posto di una geometrica proposizione. Prima però di passare all' esposizione del sistema Copernicano fa d' uopo esporre come determinare si possa con le osservazioni la durata delle rivoluzioni dei pianeti.

Rivoluzioni sinodiche, periodiche e siderali dei pianeti.

219. Il tempo che un pianeta impiega a ritornare alla stessa posizione rapporto al Sole si appella *rivoluzione sinodica;* il tempo che egli impiega a ritornare alla stessa longitudine eliocentrica si *chiama rivoluzione periodica;* ed il tempo impiegato a ritornare in congiunzione relativamente ad una stessa stella appellasi *rivoluzione siderale*.

Le rivoluzioni sinodiche dei pianeti si deducono immediatamente dall' intervallo di tempo compreso fra due consecutive congiunzioni, o fra due consecutive opposizioni. Siccome presi consecutivamente questi intervalli non sono troppo fra loro uguali, ma ora si riscontrano maggiori, ed ora minori di un limite medio, così qualora vogliasi la vera durata media della rivoluzione sinodica, conviene fra loro confrontare due opposizioni o due congiunzioni dello stesso pianeta, le più remote che ottenere si possano dalla storia dell' Astronomia. Dividendo allora il numero dei giorni, ore e minuti per il numero intero delle trascorse rivoluzioni sinodiche, se ne otterrà la sua durata media con precisione tanto maggiore, quanto più grande fu l' intervallo delle osservazioni.

Sia ora la durata della rivoluzione sinodica di un pianeta in giorni $= S$; il moto medio diurno sinodico da occidente verso oriente $= s$; il suo moto diurno periodico $= p$; sia inoltre il moto medio diurno periodico del Sole $= \sigma$. Sarà per i pianeti inferiori, che hanno un moto diurno maggiore di quello del Sole $s = p - \sigma$; e per i supe-

riori $s = \sigma - p$. Quindi avremo $p = \sigma \pm s$, valendo il segno $+$ per i pianeti inferiori, il segno $-$ per i soperiori. Sia T il numero dei giorni necessarj perchè si compia la rivoluzione tropica del pianeta. Sarà evidentemente $T = \frac{360}{p} = \frac{360}{\sigma \pm s}$.

Frattanto è facile vedere, che $s = \frac{360}{S}$, $\sigma = \frac{360}{A}$, A essendo la durata dell'anno tropico $= 365^g{,}24225$ (§ 82); sostituiti questi valori in qoello di T, si ottiene $T = \frac{AS}{S \pm A} = \frac{A}{1 \pm A : S}$, adoperando sempre il segno $+$ per i pianeti inferiori, il segno $-$ per i superiori. Conosciuto T si avrà il moto diorno p del pianeta $= \frac{360}{T}$.

220. Si può anche direttamente ottenere il tempo della media rivoluzione periodica del pianeta, confrontando le longitudini osservate in due opposizioni, o in due congionzioni fra loro molto remote con la differenza dei tempi. In fatti è facile a vedere, che nelle opposizioni e nelle congiunzioni superiori la longitudine geocentrica osservata uguaglia quella veduta dal centro del Sole, attorno a cui i movimenti dei pianeti si dimostreranno più regolari in appresso; nelle congiunzioni inferiori ne differisce di 180° esattamente. Chiamando quindi L la longitudine nella prima opposizione, L' nella seconda, n il numero delle circonferenze intere percorse dal pianeta, τ la differenza dei tempi osservata e ridotta in giorni e parti di giorno, sarà l'angolo percorso dal pianeta fra le due osservazioni $= n\,360 + L' - L$, ed il moto medio diurno $= \frac{n\,360 + L' - L}{\tau}$; quindi

$$T = \frac{\tau\,360}{n\,360 + L' - L} = \frac{\tau}{n + (L' - L) : 360}.$$

Si dimostrerà in seguito, che i moti dei pianeti veduti anche dal centro del Sole sono sottoposti ad alcune irregolarità, o vogliamo dire equazioni, le quali dipendono dalle loro posizioni nella loro orbita, e sono simili a quelle correzioni che si adoperarono per il Sole e per la Luna per ridurre le posizioni medie alle vere. Siccome esse ritornano le medesime alle medesime posizioni del pianeta, così si otterrà una maggiore precisione o confrontando insieme due opposizioni corrispondenti a longitudini fra loro poco diverse, o tenendo conto mediante le tavole dei pianeti già costrnite di queste equazioni. Daremo in segoito un metodo per correggere gli elementi delle orbite planetarie già presso a poco conosciuti. Frattanto supporremo che per una prima cognizione dei moti medj si confrontino insieme le opposizioni

dei pianeti corrispondenti a longitudini poco fra loro diverse, come accade nel seguente esempio relativo a Marte.

L'anno 1683 agli 11 Aprile $0^h\ 11'$ al meridiano di Parigi Marte era in opposizione, secondo Cassini, e la sua longitudine eliocentrica (uguale allora alla geocentrica) era $= 201°\ 41'\ 30''$. L'anno 1809 il giorno 8 Aprile a $13^h\ 50'\ 35''$ al meridiano di Padova, corrispondenti a $13^h\ 12'\ 25''$ per il meridiano di Parigi, Marte, giusta le mie osservazioni, fu in opposizione, e la sua longitudine era $= 198°\ 45'\ 54'',9$ (*Mem. della Società Ital. vol. XV*). Si domanda dietro queste osservazioni la durata della sua rivoluzione sinodica e periodica, supponendo che siasi presso a poco riconosciuto, che la durata della sua rivoluzione sinodica è $= 780$ giorni. L'intervallo delle due osservazioni, avuto il debito riguardo ai bisestili, è di giorni $46017,\ 13^h\ 1'\ 25'' = 46017,54265$, nel quale intervallo di tempo Marte ha percorso 59 rivoluzioni sinodiche esattamente. Quindi

$S = \frac{46017,54265}{59} = 779,95835$. Quindi si formerà

$$T = \frac{A}{1 - A : S} = \frac{365,24225}{1 - 0,4682842} = 686,91254.$$

Si deduce di qui il moto diurno $= 0°\ 31'\ 26''\ 704$, ed il moto annuo $= 191°\ 17'\ 26''\ 78$ (per l'anno di 365). Dietro questo risultamento è facile vedere, che nell'intervallo di $46017^g,54265$ sono comprese poco meno che 67 rivoluzioni. Fatto $n = 66$;
$L' - L = 357°\ 4'\ 24'',9$, colla seconda formula troveremo
$T = 686^g,91234$ dalla superiore pochissimo diversa.

Determinata la durata della rivoluzione periodica in un pianeta, nulla di più facile che l'assegnare la durata della rivoluzione siderea o assoluta. In fatti supponendo che il moto annuo periodico del pianeta sia espresso per n, e che la retrogradazione dell'equinozio a cui esso si riferisce sia in $365^g = 50'',25$, sarà la durata della rivoluzione siderale $= \frac{360 . 365}{n - 50'',25}$. Applicata questa formula al nostro caso, ponendo come sopra $n = 191°\ 17'\ 26'',78$, troveremo la rivoluzione siderea di Marte $= 686,96263 = 686^g\ 23^h\ 6'\ 11'',2$.

Questi risultamenti fondati sopra un unico confronto non si devono riputare esattissimi. Essi però sono molto vicini al vero, come apparisce dalla seguente tavola, ove ho riunito le durate delle rivoluzioni siderali dei pianeti dedotte dal confronto delle osservazioni, ponendo eziandio la terra fra il numero dei pianeti, la cui rivoluzione siderale uguaglia quella del Sole, come si mostrerà nell'articolo seguente.

	Rivoluzione siderale	Movimento tropico per 365^{g}, 25	Moto diurno
Mercurio . . .	87^{g}, 9692580	4$^{cir.}$ 54° 44′ 29″, 0	4° 5′ 32″
Venere	224, 7008240	1 225 11 31, 8	1 36 8
Terra	365, 2563835	1 0 0 27, 5	0 59 8, 3
Marte	686, 9796186	0 191 25 1, 3	0 31 27
Giove	4332, 5963076	0 30 21 46, 5	0 4 59, 3
Saturno. . . .	10758, 9698400	0 12 14 7, 0	0 2 0, 6
Urano o Herschel	30688, 7126872	0 4 17 54, 8	0 0 42, 4

Quanto ai quattro novissimi pianeti Cerere, Giunone, Pallade e Vesta essi hanno una rivoluzione tropica compresa fra quella di Marte e Giove. Non gli abbiamo qui inseriti riserbandoci a riferire gli elementi delle loro orbite nel quadro generale delle orbite planetarie, che trovasi in fine di questo volume.

Esposizione del sistema di Copernico.

221. Nicolò Copernico nato a Thorn in Prussia nel 1472 trovando insufficienti e complicati i sistemi astronomici allora spiegati nelle scuole, giusta i quali collocavasi la terra nel centro dell' universo, per farle rivolgere intorno giornalmente la sfera celeste, e sopra essa trasportare in direzioni particolari i pianeti, ebbe la felice idea di richiamare a nuovo esame l' antico sistema da Pitagora e dai suoi segnaci adottato, nel quale assumevasi il Sole come centro del sistema planetario, e attorno ad esso facevansi in orbite particolari e determinate ravvolgere la terra con gli altri pianeti.

Dopo avere attentamente considerato l' ipotesi Pitagorica, vide che colla medesima potevansi mirabilmente spiegare tutti i fenomeni osservati nei varj movimenti dei pianeti, ricondusse in campo nuovamente l' idea del moto della terra, ed adornò con tanta sagacità il suo sistema, che pervenne felicemente a spiegare non solo tutte le diverse apparenze dei moti celesti, ma eziandio a formare dietro di esso delle tavole astronomiche molto più esatte di quelle di Tolomeo e di Alfonso allora in uso. Ecco in poche linee il suo sistema.

Fingesi il Sole immobile nel centro del sistema planetario; ed attorno al medesimo si ravvolgono i pianeti nella costante direzione da occidente in oriente in orbite presso a poco circolari di raggio tanto più grande, quanto maggiore è il tempo della loro rivoluzione periodica sopra determinato. Così l' ordine delle orbite planetarie rapporto alla loro distanza dal Sole sarà 1.° Mercurio, 2.° Venere, 3.° la Terra, 4.° Marte, 5.° Giove, 6.° Saturno, 7.° Urano o Herschel così chia-

mato dal nome del suo inventore, il quale lo riconobbe nell'anno 1781. I moti angolari di questi pianeti intorno al centro del Sole sono presso a poco costanti ed uguali ai loro moti medj, ed in conseguenza inversamente proporzionali alle durate delle loro rivoluzioni. Così sono essi tanto minori, quanto più distanti trovansi dal centro del Sole.

Quanto alla terra, che forma il terzo pianeta del sistema solare, suppone Copernico, che essa sia condotta intorno al Sole in modo che il suo centro percorra esattamente l'orbita ellittica, che a noi sembra il Sole percorrere in un anno. Di più assume nella terra un moto di rotazione da occidente verso oriente intorno ad un asse perpendicolare all'equatore, e talmente disposto che egli rimanga sempre parallelo a se stesso in tutte le posizioni, per le quali passa il centro della terra nella sua orbita annua. Questa rotazione si compie nello spazio d'un giorno, o più esattamente in $23^h\ 56'\ 4'',09$.

Per ultimo tutti i punti del sistema planetario sono situati in una distanza infinita da ogni stella fissa, e quindi dall'apparente cielo stellato, di modo che l'asse dell'equatore terrestre rimanendo sempre a se stesso paralello, sembri incontrare in ogni tempo dell'anno la volta celeste in due punti fissi, che ne costituiscono i poli.

222. L'osservazione ci ha incontrastabilmente dimostrato, che la Luna ravvolgesi intorno alla terra in un'orbita determinata. Dopo l'invenzione dei telescopj Giove si osservò accompagnato da quattro piccole stelle, che sembrano avvolgersi intorno ad esso, come intorno ad un centro de' loro movimenti. Saturno si vede accompagnato da *sette* piccolissimi astri, ed Urano da sei. Questi corpi che girano intorno alla terra, a Giove ed a Saturno, come centri de' loro moti, appellansi *pianeti secondarj*, o anche *satelliti*. Esamineremo in seguito i moti dei satelliti di Giove, Saturno ed Urano. Frattanto dobbiamo avvertire che Copernico per rappresentare i movimenti della Luna, solo satellite conosciuto al suo tempo, ed i suoi seguaci in appresso suppongono i centri della terra, di Giove, di Saturno, di Urano trasportati nelle loro orbite intorno al Sole, ed accompagnati al tempo stesso dalle orbite dei loro rispettivi satelliti, le quali vengono da essi percorse nello stesso modo che le percorrerebbero, se i pianeti principali, centri dei loro moti, fossero in quiete. La *figura* 48 rappresenta un sistema planetario giusta la esposta ipotesi Copernicana. Il Sole occupa il centro del sistema, e intorno ad esso si ravvolgono in orbite pressochè circolari i pianeti nell'ordine sopra riferito. La terra vedesi circondata da un minore circolo rappresentante l'orbita della Luna, che seco sembra trasportare nella sua orbita annua, Giove da quattro, Saturno da sette, Urano da sei. I pianeti stessi vengono dai loro simboli rispettivi in essa figura distinti.

223. Il sistema Copernicano finora esposto soddisfa a meraviglia a

tutti i fenomeni osservati nei moti celesti. In primo luogo qualunque movimento si abbia la terra nello spazio, essendo questo comune a tutti gli esseri sopra di essa esistenti, noi non potremo percepirlo, e ci crederemo sopra di essa in quiete, perchè in virtù di questo moto comune a noi, ed a tutti gli oggetti che ci circondano, noi rapporto ad essi conserviamo la medesima posizione. Attribuiremo perciò agli oggetti che sono fuori della terra lo stesso nostro movimento rivolto in senso contrario, egualmente che in un naviglio con celerità trasportato sulla superficie delle acque noi ci crediamo in quiete, mentre sembrano muoversi in contraria parte il lido del mare, e gli oggetti tutti situati fuori del medesimo.

Quindi avendo la terra un moto di rotazione intorno ad un asse perpendicolare all' equatore, e diretto da occidente verso oriente, noi ignari di questo moto giudicheremo che gli astri tutti siano mossi da oriente verso occidente con la stessa nostra celerità angolare, percorrendo nello stesso tempo circoli in piani perpendicolari all' asse della rotazione terrestre, e quindi paralelli all' equatore. Sembrerà adunque ai nostri sensi che la sfera celeste ruoti intorno ai poli dell' equatore, compiendo nello spazio di 24 ore la sua rivoluzione, e così rapporto al moto diurno avranno luogo le stesse apparenze che abbiamo altrove descritte.

In secondo luogo, in qualunque punto della sua orbita venga dal suo moto annuo trasportata la terra, non percepirà essa il suo cambiamento di sito rapporto all' equinozio, ed il Sole sebbene immobile nel centro del sistema, verrà sempre dall' osservatore terrestre giudicato in un punto del cielo stellato opposto a quello, a cui la terra corrisponde. La longitudine del Sole veduta dalla terra differirà perciò ad ogni istante da quella della terra di 180 gradi, e quindi il Sole sembrerà precisamente dotato delle stesse variazioni in longitudine, di cui gode la terra, e parrà intorno ad essa avvolgersi in un' orbita perfettamente uguale a quella dalla medesima descritta. I fenomeni del moto diurno degli astri, e del moto annuo del Sole sono adunque nel sistema Copernicano con molta semplicità rappresentati. Vediamo se con uguale semplicità si rappresentano i fenomeni del moto annuo dei pianeti, e principiamo dai pianeti inferiori.

224. (*Fig.* 49) Rappresenti S il centro del Sole, MVV' l'orbita di Venere da essa percorsa intorno al Sole nella direzione MVV'; QPT l'orbita della terra descritta nella stessa direzione QPT; $S♈$ la linea degli equinozj; $♈GG'$ il cielo stellato ad una distanza infinita, a cui il Sole ed i pianeti tutti sono riferiti dall' osservatore terrestre.

Essendo la terra in T, il Sole in S, Venere in V; Venere ed il Sole sono dalla terra riferiti nel cielo stellato ad una stessa longitu-

dine $G\Upsilon$, e così sembra allora il pianeta nella sua congiunzione superiore. Passi la terra in un giorno da T in t, e Venere da V in v percorrendo intorno al centro del Sole un angolo $VSv > TSt$: principierà allora ad allontanarsi dalla congiunzione, e veduta dalla terra t apparirà in G' con una longitudine $G'\Upsilon > G\Upsilon$. Il suo moto apparirà diretto, come in fatti si osserva.

Allontanandosi Venere dalla congiunzione superiore V per venire alla congiunzione inferiore in V', il suo moto diretto va diminuendo, poichè la posizione dell' orbita di Venere di più in più s' inclina a quella porzione di orbita terrestre ove trovasi la terra, ed il suo moto assoluto diurno veduto obbliquamente apparirà minore. Prima che la terra e Venere giungano in T, V' passeranno rispettivamente in due istanti successivi per punti tali h, H, h', H' che i raggi visuali Hh, $H'h'$ siano paralelli, ed allora Venere riferita nel cielo stellato lungo queste linee apparirà immobile, poichè le linee paralelle ad una distanza infinita sembrano concorrere in un medesimo punto.

Dopo che Venere e la terra si trovarono in questa posizione, la sua longitudine geocentrica, che fino allora di giorno in giorno andava aumentando, principia a diminuire, Venere diviene retrograda, e nelle sue congiunzioni inferiori apparisce retrograda, come apertamente si vede dalla posizione, a cui nel cielo stellato sono riferiti i due punti V', v', nei quali trovasi Venere in due giorni consecutivi dalla terra esistente nei medesimi giorni in T, t. Dopo la congiunzione inferiore il moto retrogrado di Venere giornalmente diminuisce, finchè diviene stazionaria in una elongazione dal Sole presso a poco uguale a quella in cui lo era avanti la congiunzione. Torna quindi diretta per ripassare alla congiunzione superiore. Hanno dunque luogo nel sistema Copernicano apparenze tali, che sono esattamente conformi ai fenomeni osservati nei movimenti dei pianeti inferiori.

225. Passando ora alla spiegazione delle apparenze relative ai pianeti superiori; sia (*Fig.* 50) S il centro del Sole, PTH l'orbita della terra, QMM' l'orbita di un qualunque pianeta superiore, per es. di Marte, $\Upsilon GG'$ il cielo stellato, $S\Upsilon$ la linea degli equinozj. Essendo la terra in T, Marte in M, il Sole in S, il pianeta vedesi dalla terra in opposizione col Sole, e vien riferito al punto G con una longitudine $G\Upsilon$. Nel giorno seguente la terra essendo giunta in t, e Marte in m in modo che sia $TSt > MSm$, sarà il pianeta veduto lungo tm, e riferito in g. Così la sua longitudine avendo diminuito apparirà retrogrado.

Crescendo l' elongazione di Marte, si allontana vieppiù dall' opposizione, ed il suo moto retrogrado diminuisce finchè sia la terra giunta in H, ed il pianeta in h in posizione tale che le due linee Hh, $H'h'$ da due successivi luoghi della terra condotte ai corrispondenti punti

del pianeta siano paralelle. Allora Marte è stazionario; quindi il suo moto geocentrico diviene diretto, e diretto è pure nella sua congiunzione col Sole in M', la terra essendo in T; poichè allora passata la terra in t, ed il pianeta in m', viene riferito al punto g' sotto una longitudine $g'G\Upsilon$ maggiore della $G'G\Upsilon$ che aveva in congiunzione.

Dopo la congiunzione, il suo moto diretto va di giorno in giorno diminuendo finchè ritorna il pianeta stazionario in una elongazione presso a poco uguale a quella che aveva quando fu stazionario avanti la congiunzione; si fa quindi nuovamente retrogrado, ed il suo moto retrogrado diurno aumenta fino a che siasi ricondotto alla sua opposizione col Sole. Queste apparenze combinando esattamente coi fenomeni osservati, confermano l'ipotesi Copernicana, la quale riceve la sua ultima prova nei piccoli movimenti delle aberrazioni delle stelle fisse, come verrà a suo tempo esposto.

226. Per non dovere più riprendere queste materie passiamo a determinare il tempo, in cui un pianeta veduto dalla terra deve comparire stazionario, e per semplificare la ricerca, supponiamo le orbite del pianeta e della terra circolari comprese ambedue nel medesimo piano, e percorse uniformemente.

Rappresentando, come sopra (*Fig.* 50), PTH l'orbita della terra, $QMhh$ l'orbita di un pianeta (in questo caso superiore), siano H, h le posizioni della terra e del pianeta al momento in cui sembra stazionario, e riferiscasi la loro posizione alla linea STG, in cui il pianeta compariva in opposizione. Condotte perciò dai punti H, h le perpendicolari HR, hr, pongasi $SR=x$, $HR=y$, $Sr=x'$, $rh=y'$, $ST=a$, $SM=a'$; il moto diurno della terra $=n$, quello del pianeta $=n'$. Sia per ultimo t il tempo impiegato dalla terra e dal pianeta a percorrere gli archi TH, Mh espresso in giorni, e valutato dall'opposizione. Sarà l'angolo $TSH=nt$, e l'angolo $MSh=n't$, onde l'angolo di commutazione $hSH=(n-n')t$. Avremo poi

$$x=a\cos nt,\quad y=a\operatorname{sen} nt,\quad x'=a'\cos n't,\quad y'=a'\operatorname{sen} n't.$$

Chiamato φ l'angolo che la linea Hh prolungata fa con la linea SG, sarà φ la quantità, di cui il pianeta ha retrogradato dopo l'opposizione. Ora egli è evidente dalla Geometria analitica, che

$\operatorname{tang}\varphi=\dfrac{y'-y}{x'-x}=\dfrac{a'\operatorname{sen} n't-a\operatorname{sen} nt}{a'\cos n't-a\cos nt}$. Affinchè poi i punti H, h appartengano alle stazioni del pianeta bisogna che la linea $H'h'$ condotta nell'istante seguente dalla terra al pianeta rimanga paralella alla linea Hh, e perciò faccia con l'asse delle x uno stesso angolo φ. Quindi per una piccola variazione data al tempo t, $\operatorname{tang}\varphi$ rimane costante, e perciò $\dfrac{(d\operatorname{tang}\varphi)}{dt}=0$. Differenziando il valore di $\operatorname{tang}\varphi$

rapporto a t, ponendo il suo differenziale diviso per $d\,t = 0$, dopo le opportune riduzioni, si troverà

$$\cos(n - n')\,t = \frac{a^2\ n + a'^2\ n'}{(n + n)\ a\,a'} \quad . \ . \ . \quad (1)$$

dalla quale si otterrà ancora

$$\operatorname{sen}(n - n')\,t = \frac{\sqrt{(a'^2 - a^2)}\sqrt{(a^2\,n^2 - a'^2\,n'^2)}}{a\,a'\,(n + n')} \quad . \ . \ . \quad (2)$$

Queste equazioni daranno la quantità $(n - n')\,t$, che posta $= \theta$, porgerà $t = \frac{\theta}{n - n'}$. Siccome ad uno stesso coseno corrispondono due archi uguali, uno positivo, l'altro negativo, così il pianeta sarà ad eguali intervalli dall'opposizione stazionario, e quindi apparirà due volte stazionario in una stessa rivoluzione sinodica.

Determinato il tempo t, in cui il pianeta apparisce stazionario dopo l'opposizione, si calcolerà la mezza retrogradazione mediante la formula

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a'\operatorname{sen} n'\,t - a\operatorname{sen} n\,t}{a'\cos n'\,t - a\cos n\,t} \quad . \ . \ . \quad (3)$$

e quindi $2\,\varphi$ sarà l'arco dell'intera retrogradazione.

Sarà eziandio molto facile di determinare l'elongazione pel tempo delle stazioni, ossia l'angolo $h\,H\,S$ rappresentante la differenza delle longitudini geocentriche del Sole e del pianeta. Ponendo in fatti *il suo* supplemento $h\,H\,N = e$, condotta la perpendicolare $h\,N$ sul *raggio* $S\,H$ prolungato, sarà evidentemente $\operatorname{tang} e = \frac{a'\operatorname{sen}(n - n')\,t}{a'\cos(n - n')\,t - a}$, e sostituiti i valori di $\operatorname{sen}(n - n')\,t$, $\cos(n - n')\,t$ dati dalle equazioni (1), (2), fatte le debite riduzioni, si troverà

$$\operatorname{tang} e = \frac{\sqrt{(a^2\,n^2 - a'^2\,n'^2)}}{n'\sqrt{(a'^2 - a^2)}} \quad . \ . \ . \quad (4)$$

227. *Scolio*. Si dimostrerà fra poco, che chiamando T, T' i tempi delle rivoluzioni siderali di due pianeti, per esempio di T e di M, si ha $T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$, dalla quale proporzione, posto $a^3 = k^3\,T^2$, rilevasi $a'^3 = k^3\,T'^2$, e perciò $a = k\,T^{2:3}$, $a' = k\,T'^{2:3}$. D'altra parte si ha $n = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,T^{-1}$, $n' = 2\,\pi\,T'^{-1}$. Introducendo questi valori nella equazione (1), essa diviene
$\cos(n - n')\,t = \frac{(T\,T')^{1:3}\,(T^{1:3} + T'^{1:3})}{T + T'}$, la quale porge il tempo t per la durata delle rivoluzioni siderali osservate.

L'equazione (4) si può ancora scrivere sotto la forma

$$\tang e = \sqrt{\left(a^2 \frac{n^2}{n'^2} - a'^2\right)} : \sqrt{(a'^2 - a^2)} = \sqrt{\left(a^2 \frac{T'^2}{T^2} - a'^2\right)} : \sqrt{(a'^2 - a)},$$

ed osservando che $T'^2 : T^2 = a'^3 : a^3$, essa cangiasi nella seguente

$$\tang e = a' \sqrt{(a' - a)} : \sqrt{(a'^2 - a^2)}\, a = a' : \sqrt{(a + a')\, a}.$$

Posta la distanza media della terra dal Sole $= a = 1$, si ottiene $\tang e = \frac{a'}{\sqrt{(a' + 1)}}$, formula dovuta a Keill, e dà l'elongazione di un pianeta quando è stazionario, supponendo che si muova in un circolo nel piano dell'ecclittica.

Se poi avremo osservato l'angolo e, quando il pianeta era stazionario, troveremo $a' = \frac{\tang e + \sqrt{(4 + \tang^2 e)}}{2} \tang e$, la qual formula servirà a darci una prima idea della distanza del pianeta dal Sole, prendendo per unità quella della terra dal Sole. Il valore di a' sarebbe esatto nelle condizioni assunte dal problema, le quali a vero dire non sono che troppo poco corrispondenti al caso della natura.

CAPITOLO XVII.

Prime ricerche intorno all'orbita dei pianeti.

Problema I. *Esporre i metodi opportuni per determinare da una lunga serie d'osservazioni la posizione del piano dell'orbita di un pianeta rapporto al piano dell'ecclittica.*

228. Sia (*Fig.* 51) S il centro del Sole, P un punto dell'orbita del pianeta, in cui ad un qualunque tempo ritrovasi. Rappresentando il piano della tavola quello dell'ecclittica, sia $S♈$ la linea degli equinozj, ♈ l'equinozio di primavera, $S☊$ l'intersezione del piano dell'orbita del pianeta coll'ecclittica, a cui gli Astronomi danno il nome di *linea dei nodi*, ed ☊ rappresenti quel punto del cielo stellato, a cui corrispondere sembra il pianeta passando dall'emisfero australe nell'emisfero boreale dell'ecclittica, al qual punto dassi il nome di *nodo ascendente*. Sarà la sua posizione determinata dall'angolo $☊S♈$, a cui dassi il nome di *longitudine del nodo ascendente*. Posto ciò, dal punto P si abbassi nel piano dell'ecclittica la perpendicolare PB, e si conduca da B la BA perpendicolare alla linea degli equinozj. Condotta inoltre la retta BD perpendicolare ad $S☊$, e la PD, sarà BDP l'inclinazione del piano dell'orbita del pianeta al piano dell'ecclittica. L'angolo $BS♈$ è la longitudine eliocentrica del pianeta; PSB la sua latitudine eliocentrica.

Del pari, se allo stesso istante T è il centro della terra, condotta per il punto T una linea $T\Upsilon'$ paralella ad $S\Upsilon$, sarà $BT\Upsilon'$ la longitudine geocentrica del pianeta; PTB la sua latitudine geocentrica; $TS\Upsilon$ sarà la longitudine eliocentrica della terra, che uguaglia sempre quella del Sole — $180°$. Premesse queste cose, domandasi l'equazione del piano dell'orbita del pianeta.

Pongasi $AS = x$, $BA = y$, $BP = z$; l'inclinazione dell'orbita $BDP = i$, l'angolo $\Omega S\Upsilon = \omega$; sarà $z = BD \tang i$; ora $BD = BE \cos\omega = (y - x \tang\omega) \cos\omega$, dunque $z = y \tang i \cos\omega - x \tang i \sen\omega$, e questa sarà l'equazione del piano dell'orbita data per le coordinate del pianeta relative al centro del Sole.

Potremo ancora in essa introdurre le coordinate del centro della terra e del pianeta rapporto alla terra. In fatti ponendo $St = X$, $Tt = Y$, $Te = x'$, $Be = y'$, le coordinate geocentriche del pianeta saranno x', y', z'. Avremo poi $x = X + x'$, $y = Y + y'$, e perciò

$$z' = \tang i \cos\omega (Y + y') - \tang i \sen\omega (X + x') \quad . \; . \; . \; (1)$$

Si ponga ora $ST = R$, $TB = g$, la longitudine del Sole $= A$, e perciò l'angolo $TS\Upsilon = A - 180°$. Sia inoltre la longitudine geocentrica del pianeta, ossia l'angolo $BT\Upsilon' = \alpha$, la sua latitudine geocentrica $= \beta$, avremo evidentemente $X = -R \cos A$, $Y = -R \sen A$, $x' = g \cos\alpha$, $y' = g \sen\alpha$, $z' = g \tang\beta$... Sostituendo questi valori nell'equazione (1) otterremo la seguente

$$g \tang\beta = g \tang i \sen(\alpha - \omega) - R \tang i \sen(A - \omega) \quad . \; . \; (2)$$

la quale equazione ci somministra un rapporto fra le costanti i, ω, che determinano la posizione dell'orbita rapporto all'ecclittica, la distanza accorciata g del pianeta dalla terra, la longitudine e la latitudine geocentrica del pianeta, che immediatamente deduconsi dalle osservazioni. Da essa ricaveremo il modo di determinare coll'osservazione le costanti i ed ω.

In primo luogo si determinerà ω scegliendo una tale osservazione in cui fosse $A = \omega = \alpha$, ovvero $A = \omega = 180 + \alpha$. Poichè allora il pianeta essendo o in congiunzione, od in opposizione, la longitudine geocentrica è uguale all'eliocentrica. Dietro queste posizioni risulterà $\beta = 0$. Se adunque in una qualche opposizione, od in una qualche congiunzione, sarà $\beta = 0$, allora la longitudine geocentrica osservata porgerà direttamente il valore di ω, il quale sarà la longitudine del nodo ascendente, se la latitudine geocentrica passando per o di australe diviene boreale; differirà poi da questa di $180°$, ossia sarà la longitudine del nodo discendente nel caso contrario. In una lunga serie di osservazioni non può mancarne una che goda dei proposti requisiti. Se poi, quando $A = \alpha$, ovvero $= 180 + \alpha$, non fosse esattamente $\beta = 0$, ma soltanto piccolissimo si cercherebbe prima coll'interpolazione di due successivi valori osservati di β il momento in cui

diviene $= 0$. Allora al valore di α aggiungendo il moto eliocentrico medio del pianeta, se l'istante corrispondente a $\beta = 0$ segue l'osservazione, o togliendolo se lo precede, si avrà il valore di ω tanto più prossimo al vero, quanto minore sarà β, poichè per un piccolo numero di ore il moto medio dei pianeti non molto differisce dal moto vero, massime per una prima approssimazione.

Determinato in tal guisa ω, per determinare i si sceglierà una tale osservazione in cui fosse $A - \omega = 0$, ovvero $= 180$; in questa circostanza l'equazione (2) darà $\tang i = \frac{\tang \beta}{\sen(\alpha - \omega)}$, donde il valore di i sarà tanto meglio determinato, quanto più la quantità $\alpha - \omega$ si avvicinerà ad essere $= 90$, ovvero $270°$. Che se la serie delle osservazioni non desse esattamente $A - \omega = 0$, ma soltanto piccolissimo, mediante l'interpolazione, si dedurranno i valori di α e di β corrispondenti a questo caso.

229. *Scolio*. Determinando per ogni pianeta del sistema solare la longitudine del suo nodo ascendente, e l'inclinazione dell'orbita all'eclittica per due epoche lontanissime, si riscontra fra i risultamenti una qualche differenza, ed esaminando più da vicino queste differenze si trova che esse vanno variando lentissimamente, ed in proporzione al tempo. Questi lentissimi movimenti, che per un piccolo numero di anni sono trascurabili, massime se trattisi di una prima indagine dell'orbita, sono conosciuti sotto il nome di *variazioni secolari del nodo e dell'inclinazione*. La teoria dell'attrazione universale spiega l'origine di queste variazioni secolari, e nel tempo stesso ci assicura che sono di tal indole da far sempre oscillare le inclinazioni delle orbite planetarie in limiti assai ristretti. In fine di questo volume daremo le longitudini dei nodi, e le inclinazioni delle orbite dei pianeti unitamente alle loro variazioni secolari.

Problema II. Data la posizione dell'orbita di un pianeta, la sua longitudine e la latitudine geocentrica osservata, si domanda la sua distanza dalla terra, la sua distanza dal Sole, come anche la longitudine e latitudine eliocentrica corrispondente.

230. In primo luogo l'equaz. (2) dà $g = \frac{R \tang i \sen(A - \omega)}{\tang i \sen(\alpha - \omega) - \tang \beta}$.

Ritenute le denominazioni del problema precedente, sia inoltre la longitudine eliocentrica del pianeta $BS\Upsilon = l$, la sua latitudine eliocentrica $PSB = \lambda$, la distanza BS projettata nel piano dell'eclittica $= r$. Avremo $x = r\cos l$, $y = r \sen l$, $z = r \tang \lambda$. Siccome poi era

$$x = X + x' = -R\cos A + g\cos\alpha,$$

$$y = Y + y' = -R\sen A + g\sen\alpha, \quad z = z' = g\tang\beta,$$

ne dedurremo

$$\left.\begin{array}{l} r\cos\ l = -R\cos A + g\cos\alpha \\ r\,\text{sen}\ l = -R\,\text{sen}\,A + g\,\text{sen}\,\alpha \\ r\,\text{tang}\,\lambda = g\,\text{tang}\,\beta \end{array}\right\}\quad (\text{A})$$

le quali equazioni risolveranno sempre completamente il proposto problema. Le prime due equazioni (A) si possono scrivere sotto una forma più comoda per il calcolo numerico delle incognite r, l. In fatti sommando la prima moltiplicata per sen α colla seconda moltiplicata per $-\cos\alpha$; ovvero la prima moltiplicata per $\cos\alpha$ colla seconda moltiplicata per sen α avremo

$$r\,\text{sen}(\alpha - l) = R\,\text{sen}(A - \alpha),\quad r\cos(\alpha - l) = g - R\cos(A - \alpha).$$

La prima divisa per la seconda darà $\text{tang}(\alpha - l)$; quindi $l = \alpha - (\alpha - l)$; sommandone i quadrati si otterrà $r^2 = R^2 - 2Rg\cos(A - \alpha) + g^2$.

La terza poi darà $\text{tang}\,\lambda = \frac{g}{r}\,\text{tang}\,\beta$. Conosciuti r e λ, sarà la distanza PS del pianeta dal Sole $= \frac{r}{\cos\lambda}$.

231. *Scolio*. Se l'inclinazione $i = 0$, allora essendo pure $\beta = 0$, riuscirà g indeterminato, ed in generale g sarà sempre mal determinato, se, come accade nella teoria dei pianeti, i è un piccolo angolo. Perciò il metodo precedente non può condurre a risultamenti molto sicuri. Siccome poi la ricerca dell'orbita dei pianeti si riduce a conoscere con precisione alquanti valori di r, di l e di λ in diversi punti dell'orbita, così esporremo un altro metodo, col quale dedurremo dalle osservazioni le posizioni eliocentriche del pianeta in diversi punti della sua orbita. Consiste questo nel confrontare fra loro due osservazioni distanti di una intera rivoluzione siderale del pianeta, nel qual caso essendo egli ritornato alla stessa posizione del cielo stellato, le quantità r, l sono le medesime. Se pertanto indichiamo le quantità g, α, R, A, β corrispondenti alla seconda osservazione per g', α', R', A', β', le prime due equazioni (A) applicate alle due osservazioni daranno

$$r\cos l = -R\cos A + g\cos\alpha = -R'\cos A' + g'\cos\alpha'$$
$$r\,\text{sen}\,l = -R\,\text{sen}\,A + g\,\text{sen}\,\alpha = -R'\,\text{sen}\,A' + g'\,\text{sen}\,\alpha'$$

Eliminando ora da queste due equazioni prima g', poi g, otterremo

$$g\,\text{sen}(\alpha' - \alpha) = R\,\text{sen}(\alpha' - A) - R'\,\text{sen}(\alpha' - A')$$
$$g'\,\text{sen}(\alpha' - \alpha) = R\,\text{sen}(\alpha - A) - R'\,\text{sen}(\alpha - A')$$

Calcolate, mediante queste due equazioni, le distanze g, g' troveremo l, r, λ mediante le equazioni (A), e quindi dedurremo la distanza assoluta PS del pianeta dal Sole, le quali quantità ricavate da ambedue le osservazioni porgeranno una riprova del calcolo coll'uniformità dei risultamenti.

Per l'uso di questo metodo fa d'uopo che la differenza dei tempi

delle osservazioni sia uguale precisamente alla intera rivoluzione siderale del pianeta, perchè soltanto dopo averla compita il pianeta ritorna alla stessa posizione nello spazio. Se nella serie delle osservazioni non esistessero due tali che a questa condizione soddisfacessero, se ne scelgano due vicinissime, e quindi col moto geocentrico osservato si riduca una di esse all' istante preciso, che somministri la richiesta differenza dei tempi. Fa d' uopo inoltre che siano ambedue computate dalla stessa posizione dell' equinozio supposto fisso rapporto alle stelle. Quindi se le longitudini osservate siano riferite all' equinozio mobile di primavera, si ridurranno le posizioni corrispondenti ad una di esse per esempio alla seconda, a quelle che avrebbero avuto luogo se la posizione dell' equinozio fra la prima e seconda osservazione fosse rimasta costante togliendo da α', A' la quantità di cui nell' intervallo dato ha retrogradato l' equinozio.

Problema III. Date le longitudini e latitudini eliocentriche di un pianeta, determinare la sua posizione nel piano dell' orbita, e viceversa.

232. Sia (*Fig.* 32) $\Upsilon N L$ l' eclittica veduta dal centro del Sole; $\Upsilon' N l$ l' intersezione del piano dell' orbita colla sfera celeste; N la posizione del nodo ascendente, cosicchè la sua longitudine sia $= \Upsilon N$. L' angolo in N sarà l' inclinazione dell' orbita del pianeta all' eclittica. Ad un istante qualunque il pianeta veduto dal centro del Sole venga riferito al punto l. Condotto l' arco $l L$ perpendicolare all' eclittica, e preso l' arco $N \Upsilon' = N \Upsilon$, sarà $L \Upsilon$ la longitudine eliocentrica del pianeta, $L l$ la sua latitudine eliocentrica; l' arco $l \Upsilon'$ determina la posizione del pianeta nell' orbita, ed appellasi dagli Astronomi *longitudine nell' orbita*. Posto pertanto $\Upsilon L = l$, $L l = \lambda$, $\Upsilon N = \Upsilon' N = \Omega$, $\Upsilon' l = P$, l' angolo in $N = i$, proveremo, come nei §§ 148-149, che hanno luogo le seguenti equazioni

$$\cos(P - \Omega) = \cos\lambda \cos(l - \Omega), \quad \operatorname{tang}(P - \Omega) = \frac{\operatorname{tang}(l - \Omega)}{\cos i},$$

la seconda delle quali svolgesi nella serie

$$P = l + R'' \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen} 2(l - \Omega) + \tfrac{1}{2} R'' \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen} 4(l - \Omega) + \ldots$$

che è convergentissima nel caso di i molto piccolo, e porge con somma facilità la longitudine del pianeta nell' orbita.

Viceversa dato P ed i, si avrà dalla seconda equazione

$$\operatorname{tang}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tang}(P - \Omega),$$

donde per la serie 5 (Trig. IV) si ottiene

$$l = P - R'' \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen} 2(P - \Omega) + \tfrac{1}{2} R'' \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen} 4(P - \Omega) + \ldots$$

La latitudine eliocentrica λ si troverà dalla formula

$\operatorname{sen}\lambda = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(P - \Omega)$, che tosto deducesi dalla considerazione del triangolo rettangolo $N L l$.

233. *Scolio I.* Egli è ora facile di verificare se l'ipotesi finora assunta, che l'orbita di un pianeta sia compresa in un piano determinato, il quale passi per il centro del Sole, sia legittima. Affinchè questa ipotesi sia legittima deve la latitudine eliocentrica dedotta dalle osservazioni combinare col valore di Ll ricavato dalla formula $\text{sen}\,\lambda = \text{sen}\,i\,\text{sen}(P - \Omega)$, ovvero dall'altra $\text{tang}\,\lambda = \text{tang}\,i\,\text{sen}(l - \Omega)$, che ci somministra la risoluzione del triangolo NlL; siccome poi una tale coincidenza ha luogo o esattamente, o con piccolissime differenze da principio trascurabili, così rimane essa verificata.

In secondo luogo, se col secondo dei sovra indicati metodi sieno state ridotte al Sole alquante osservazioni di un pianeta avanti e dopo il suo passaggio per il nodo, si potrà col loro mezzo determinare la posizione del nodo con molta precisione, facendo uso di quello stesso metodo che abbiamo esposto nella teoria della Luna § 142.

234. *Scolio II.* Avendo coi metodi esposti nelle due proposizioni precedenti determinato per diverse osservazioni la distanza del pianeta dal centro del Sole, e la longitudine nell'orbita, si troverà che le distanze non sono uguali, ed i movimenti angolari del pianeta non sono perfettamente uniformi. Costruendo la curva descritta per punti si scoprirà in essa un'analogia coll'ellisse; e siccome l'ipotesi del moto ellittico rappresenta già assai bene il moto annuo della terra, così saremo indotti ad adottare l'ipotesi di un moto ellittico eziandio per i pianeti, e supporre quindi che essi descrivano intorno al centro del Sole, come foco comune, altrettante ellissi di vario parametro e di varia posizione. In questa supposizione determineremo la ellissi dal pianeta descritta mediante tre osservazioni ridotte al centro del Sole, la quale, se soddisferà alle altre posizioni osservate, stabilirà la verità dell'ipotesi. Come poi determinare si debbano i parametri di questa ellisse, e la loro posizione nel piano dell'orbita, si rileva dal seguente

Problema IV. Determinare l'ellisse, che passa per tre punti A, B, C *dati da tre osservazioni rapporto al foco* S *situato nel centro del Sole.*

235. Sia (*Fig.* 52) $S\Upsilon$ la linea fissa nell'orbita, da cui si contano le longitudini. Saranno dati dall'osservazione gli angoli $AS\Upsilon = n$, $BS\Upsilon = n'$, $CS\Upsilon = n''$, ed i raggi vettori $SA = r$, $SB = r'$, $SC = r''$. Il parametro incognito dell'ellisse sia $= p$, l'eccentricità $= e$, l'angolo $PS\Upsilon$, ossia la longitudine del perielio della cercata ellisse $= \pi$.

L'equazione polare dell'ellisse dà le seguenti tre relazioni

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(n - \pi),\quad \frac{p}{r'} = 1 + e\cos(n' - \pi),\quad \frac{p}{r''} = 1 + e\cos(n'' - \pi),$$

dalle quali ricaveremo i valori delle incognite p, e, π.

Se moltiplichiamo la prima equazione per $\text{sen}\,(n'' - n')$, la seconda

per $-\operatorname{sen}(n''-n)$, la terza per $\operatorname{sen}(n'-n)$, sommando i prodotti, otterremo la seguente

$$p\left(\frac{\operatorname{sen}(n''-n')}{r}-\frac{\operatorname{sen}(n''-n)}{r'}+\frac{\operatorname{sen}(n'-n)}{r''}\right)=\operatorname{sen}(n''-n')-\operatorname{sen}(n''-n)+\operatorname{sen}(n'-n)$$
$$+e\left[\cos(n-\pi)\operatorname{sen}(n''-n')-\cos(n'-\pi)\operatorname{sen}(n''-n)+\cos(n''-\pi)\operatorname{sen}(n'-n)\right].$$

Cambiando nel coefficiente di e i prodotti dei coseni per i seni in seni semplici, esso riducesi identicamente $= 0$. Perciò sarà

$$p=\frac{[\operatorname{sen}(n''-n')-\operatorname{sen}(n''-n)+\operatorname{sen}(n'-n)]\,r\,r'\,r''}{r'\,r''\operatorname{sen}(n''-n')-r\,r''\operatorname{sen}(n''-n)+r\,r'\operatorname{sen}(n'-n)},$$

ove il denominatore uguaglia evidentemente il doppio dell'area del triangolo ABC. Affinchè dunque il valore di p risulti con precisione determinato, i tre punti A, B, C non dovranno avvicinarsi ad essere in linea retta, ed in generale converrà procurare di scegliere osservazioni tali, che $n''-n$ avvicinandosi a $180°$, $n''-n'$, $n'-n$ si avvicinino più che sia possibile a $90°$.

Determinato p, due qualunque delle superiori equazioni daranno i valori di e e di π. Così le due prime, ponendo $\frac{p}{r}-1=q$, $\frac{p}{r'}-1=q'$ divengono $e\cos(n-\pi)=q$, $e\cos(n'-\pi)=q'$, le quali, essendo simili a quelle del § 154, si risolvono allo stesso modo. Essendo adunque h un angolo arbitrario, coll'analisi esposta nel citato luogo si troverà

$$e\operatorname{sen}(\pi-h)=[q'\cos(n-h)-q\cos(n'-h)]:\operatorname{sen}(n'-n)$$
$$e\cos(\pi-h)=[q\operatorname{sen}(n'-h)-q'\operatorname{sen}(n-h)]:\operatorname{sen}(n'-n).$$

Ponendo $h=\tfrac{1}{2}(n'+n)$, si ottiene

$$e\operatorname{sen}[\pi-\tfrac{1}{2}(n'+n)]=\frac{q'-q}{2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(n'-n)};$$
$$e\cos[\pi-\tfrac{1}{2}(n'+n)]=\frac{q'+q}{2\cos\tfrac{1}{2}(n'-n)};$$

Dividendo la prima per la seconda si ha

$$\operatorname{tang}[\pi-\tfrac{1}{2}(n'+n)]=\frac{q'-q}{q'+q}\cot\tfrac{1}{2}(n'-n).$$

Determinato l'angolo $\pi-\tfrac{1}{2}(n'+n)$, le due precedenti dovransi accordare a dare per e lo stesso valore.

236. *Scolio I.* Calcolando col metodo esposto in questo problema la posizione dei perielj e delle eccentricità delle orbite dei pianeti ad epoche lontanissime, si è riconosciuto che sì quelli che queste sono sottoposte a lentissime variazioni secolari simili a quelle del perielio, ed eccentricità dell'orbita terrestre, e solo in quantità da

quelle differenti. La teoria delle reciproche attrazioni spiega l'origine di questi piccoli movimenti, e dimostra al tempo stesso che le eccentricità delle orbite dei pianeti rimarranno sempre piccole, e collo svolgersi dei secoli queste piccole variazioni cambieranno di segno.

237. *Scolio II.* Keplero il primo avendo determinato per Marte l'ellisse che soddisfa a tre osservazioni, dimostrò che soddisfaceva eziandio alle altre. Non contento di avere trovato i parametri dell'ellisse, che rappresentava a maraviglia i moti di Marte, applicò lo stesso metodo eziandio agli altri pianeti, e determinò di tutti gli assi maggiori e l'eccentricità delle loro orbite. Confrontando in seguito le aree dei settori ellittici coi tempi impiegati a percorrerle, ed i tempi delle rivoluzioni dei pianeti cogli assi maggiori delle orbite rispettive, pervenne a dimostrare e stabilire con confronti numerici le leggi, dalle quali sono moderati i movimenti dei pianeti e delle comete nel sistema solare, che dal suo nome appellansi volgarmente *leggi di Keplero*, ed annunziansi nel modo seguente:

Legge I. I pianeti si muovono intorno al Sole in orbite ellittiche per modo che il centro del Sole sia foco comune di tutte.

Legge II. In una stessa orbita ellittica, le aree percorse dal raggio vettore, che fingesi continuamente condotto dal centro del Sole al pianeta, sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.

Legge III. I quadrati dei tempi delle rivoluzioni siderali dei pianeti sono proporzionali ai cubi degli assi maggiori, ed indipendenti dalle eccentricità delle loro orbite.

Si deducono da queste leggi alcune importanti conseguenze intorno al moto dei pianeti, che qui giova di brevemente esporre. Supponiamo due pianeti P, P' rivolgentisi intorno al centro del Sole, come foco comune delle loro orbite, in due ellissi, delle quali a, a' sieno i semiassi maggiori; b, b' i semiassi minori; e, e' l'eccentricità; T, T' i tempi delle rivoluzioni siderali espresse in giorni; S, S' le superficie delle loro ellissi; p, p' i semiparametri delle medesime. Dietro le proprietà dell'ellissi, che s'insegnano nelle sezioni coniche abbiamo $b = a\sqrt{(1-e^2)}$, $S = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{(1-e^2)}$, π essendo il rapporto della circonferenza al diametro, $p = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2)$; simili rapporti regnando fra le quantità a', b', e', S', p' relative alla seconda ellisse.

Se ora indichiamo per s la superficie di un settore ellittico dal raggio vettore del pianeta P percorso nel tempo t, per s' la superficie del settore corrispondente al tempo t' per il pianeta P', in virtù della seconda legge di Keplero avremo $s : S :: t : T$; $s' : S' :: t' : T'$.

Quindi formeremo $\frac{s}{t} = \frac{S}{T} = c$, $\frac{s'}{t'} = \frac{S'}{T'} = c'$; c e c' essendo costanti in una stessa ellisse, e variando da una ad un'altra. Si deduce da ciò che $\frac{S}{T} : \frac{S'}{T'} :: c : c'$, e quindi $\frac{S^2}{T^2} : \frac{S'^2}{T'^2} :: c^2 : c'^2$. Ma per la terza legge si ha $T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$; dunque, sostituendo eziandio i valori di S^2, S'^2, e riducendo la proporzione, avremo $\frac{b^2}{a} : \frac{b'^2}{a'} :: c^2 : c'^2$, ossia $p : p' :: c^2 : c'^2$, dalla quale segue che $\frac{c}{\sqrt{p}} = \frac{c'}{\sqrt{p'}} = k$, essendo k costante per tutti i pianeti. Sarà perciò $c = k\sqrt{p}$, e quindi $\frac{s}{t\sqrt{p}} = \frac{s'}{t'\sqrt{p'}} = k$, cioè *nel nostro sistema planetario la superficie di un settore ellittico divisa per il tempo impiegato a percorrerla, e per la radice del parametro dell'orbita dà un numero costante per tutti i pianeti*. Questo numero poi si determinerà agevolmente prendendo per s la superficie dell'orbita dalla terra percorsa, per cui si ha $s = a^2\pi\sqrt{(1 - e^2)} = \pi\sqrt{(1 - e^2)}$, $\sqrt{p} = \sqrt{[a(1 - e^2)]} = \sqrt{(1 - e^2)}$; t = rivoluzione siderale della terra $= 365,2563835$, perciò $k = \frac{\pi}{t} = 0,00860106$.

La terza legge di Keplero porge un metodo molto pronto per determinare i rapporti dei semiassi maggiori delle orbite planetarie al semiasse dell'orbita terrestre, che porremo $= 1$. In fatti intendendo per T la rivoluzione siderale della terra, essa dà per un qualunque pianeta P' l'equazione $a' = \frac{T'^{2:3}}{T^{2:3}} = 0,01957048\ T'^{2:3}$.

238. Del resto la seconda legge è quella stessa che già scoprimmo coll'osservazione nel movimento ellittico del Sole intorno alla terra; e siccome dietro di essa nella teoria del Sole abbiamo potuto ad ogni istante determinare la sua posizione nella ellisse, che egli sembra descrivere intorno alla terra, così cogli stessi precetti potremo determinare la posizione di un pianeta nella sua orbita ellittica intorno al Sole.

Supponesi pertanto che un pianeta fittizio parta dal perielio nel tempo stesso del vero pianeta, e vada percorrendo la circonferenza della sua orbita per modo che le sue distanze angolari dal perielio aumentino uniformemente di una quantità uguale al moto medio del pianeta. La distanza angolare del pianeta dal perielio così determinata, appellasi *anomalia media*, chiamandosi *anomalia vera* la sua vera distanza dal perielio; l'anomalia sì media, che vera aumentate della longitudine del perielio danno la *longitudine media* e la *longitudine*

vera del pianeta nell'orbita; la differenza fra l'anomalia vera e la media, ed anche fra la longitudine vera e la longitudine media appellasi *equazione del centro*, e la longitudine media che contasi ad un dato istante, da cui si parte per determinare le altre longitudini medie coll'aggiungervi continuamente il moto medio, chiamasi *epoca dei moti medj*. Queste denominazioni sono le stesse di quelle che già abbiamo impiegato nella teoria del Sole e della Luna.

Problema V. Determinare l'epoca dei moti medj di un pianeta, ossia la sua longitudine media ad un istante determinato preso per origine del tempo.

239. La soluzione di questo problema si riduce a cercare l'anomalia media corrispondente ad una data anomalia vera. Ritenendo pertanto le denominazioni del problema precedente, fingiamo che la prima osservazione del pianeta in A (*Fig.* 52) corrispondesse ad un tempo t a partire dall'origine. Avendo determinato la longitudine del perigeo, e l'eccentricità, si formi l'anomalia vera $ASP = n - \pi$, che porremo $= v$. Chiamando z l'anomalia media corrispondente, si otterrà essa dalla serie $z = v - 2e \operatorname{sen} v + (\frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4) \operatorname{sen} 2v$ ec. del § 90, oppure dalle formule segnenti

$$(1)\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v; \quad (2)\ z = E - e'' \operatorname{sen} E$$

del § 86, ove e'' è l'eccentricità ridotta in secondi, cioè il numero $R''e$. Determinato z, la longitudine media corrispondente al *tempo* t sarà $= z + \pi$, da cui, tolto il moto medio diurno del pianeta moltiplicato per t, si otterrà la longitudine media all'origine del tempo, ossia la cercata epoca dei moti medj.

Problema VI. Determinare ad un dato tempo t la posizione del pianeta nella sua orbita.

240. All'epoca dei moti medj si aggiunga il moto medio del pianeta per il tempo t, e si formerà la sua longitudine media, che rappresenteremo per p. Si avrà quindi l'anomalia media $z = p - \pi$. Si calcoli l'anomalia vera corrispondente ed il raggio vettore coi precetti esposti nella teoria del Sole. Comodissime a tale oggetto sono le formule del § 86, dalle quali ponendo $e = \operatorname{sen} \varphi$, si ottengono le seguenti

$$(1)\ z = E - e'' \operatorname{sen} E; \quad (2)\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \operatorname{tang}(45 + \tfrac{1}{2}\varphi) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E;$$

$$(3)\ r = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi \cos v} = a(1 - \operatorname{sen} \varphi \cos E).$$

L'equazione (1) darà E col mezzo delle false posizioni in quel modo che si è esposto al § 85. Quindi le equazioni (2), (3) daranno v ed r. Ottenuto E si potranno con molta speditezza calcolare v ed r colle

formule (a) e (b) dello stesso § 86, le quali nella fatta supposizione divengono

(a) $\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,v\sqrt{r} = \sqrt{(2\,a)}\ \text{sen}\,(45 + \tfrac{1}{2}\,\varphi)\ \text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,E$;

(b) $\cos\tfrac{1}{2}\,v\sqrt{r} = \sqrt{(2\,a)}\cos(45 + \tfrac{1}{2}\,\varphi)\cos\tfrac{1}{2}\,E$;

dalle quali deducesi, moltiplicando insieme, la relazione

(c) $r\ \text{sen}\ v = a\cos\varphi\ \text{sen}\ E$.

Qualora poi siasi ottenuto v, si avrà la longitudine vera nell'orbita $P = v + \pi$.

Problema VII. Data per un tempo t la posizione del pianeta nell'orbita, cioè la sua longitudine vera P, ed il raggio vettore r, si domanda la sua posizione eliocentrica rapporto all'eclittica, od all'equatore, cioè la longitudine e latitudine eliocentrica, od anche l'AR e declinazione.

241. Supponiamo che il pianeta nella sua orbita (*Fig.* 32) dal centro del Sole si veda riferito in l. Condotto all'eclittica l'arco lL perpendicolare, sia $lL = \lambda$, $L\Upsilon = l$, $N\Upsilon' = N\Upsilon = \omega$, ed il triangolo rettangolo lNL darà $\text{sen}\,\lambda = \text{sen}\,i\ \text{sen}\,(v + \pi - \omega)$, $\text{tang}\,(l - \omega) = \cos i\ \text{tang}\,(v + \pi - \omega)$, la quale svolta in serie darà

$l = v + \pi - R''\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,i\ \text{sen}\,2\,(v + \pi - \omega) + \tfrac{1}{2}R''\,\text{tang}^4\tfrac{1}{2}\,i\ \text{sen}\,4\,(v + \pi - \omega)$
$- \tfrac{1}{3}R''\,\text{tang}^6\tfrac{1}{2}\,i\ \text{sen}\,6\,(v + \pi - \omega)$ ec.

La projezione di r nell'eclittica sarà $r' = r\cos\lambda$. Le quantità r, λ, l, ovvero anche r', λ, l determinano la posizione eliocentrica del pianeta rapporto all'eclittica, donde è facile calcolare eziandio l'AR e declinazione eliocentrica.

Si determina comodissimamente la posizione eliocentrica di un pianeta rapporto all'eclittica e rapporto all'equatore col mezzo di coordinate rettangole. Rappresentando in fatti le coordinate eliocentriche rapporto all'eclittica per x, y, z riferite alla linea dell'equinozio di primavera, come asse delle x, troveremo (§ 64)

$x = r\cos\lambda\cos l$, $y = r\cos\lambda\ \text{sen}\ l$, $z = r\ \text{sen}\,\lambda$.

Ora il triangolo sferico lNL, ponendo per brevità $lN = v + \pi - \omega = t$, dà

(1) $\text{sen}\,\lambda = \text{sen}\,i\ \text{sen}\,t$,

(2) $\cos t = \cos(l - \omega)\cos\lambda = \cos\omega\cos\lambda\cos l + \text{sen}\,\omega\cos\lambda\ \text{sen}\,l$,

(3) $\text{sen}\lambda\cot i = \cos\lambda\,\text{sen}(l - \omega) = -\text{sen}\omega\cos\lambda\cos l + \cos\omega\cos\lambda\,\text{sen}\,l = \cos i\,\text{sen}\,t$,

delle quali la seconda e terza danno

$\cos l\cos\lambda = \cos\omega\cos t - \cos i\ \text{sen}\,\omega\ \text{sen}\,t$,

$\text{sen}\,l\cos\lambda = \text{sen}\,\omega\cos t + \cos i\cos\omega\ \text{sen}\,t$.

Si otterrà così $x = r\cos\omega\cos t - r\cos i\ \text{sen}\,\omega\ \text{sen}\,t$;

$y = r\ \text{sen}\,\omega\cos t + r\cos i\cos\omega\ \text{sen}\,t$; $z = r\ \text{sen}\,i\ \text{sen}\,t$.

Similmente se vorransi determinare le coordinate eliocentriche del pianeta rapporto all'equatore prendendo per asse delle x la linea degli equinozj, per asse delle y una linea a questa perpendicolare nella su-

perficie dell' equatore, e per asse delle z l'asse dell' equatore, chiamando x', y', z' le coordinate del pianeta; α, δ l'AR e la declinazione eliocentrica, ed ϵ l'obbliquità dell' ecclittica, avremo

$$x' = r\cos\alpha\cos\delta = r\cos l\cos\lambda,$$
$$y' = r\,\text{sen}\,\alpha\cos\delta = r\,\text{sen}\,l\cos\lambda\cos\epsilon - r\,\text{sen}\,\epsilon\,\text{sen}\,\lambda,$$
$$z' = r\,\text{sen}\,\delta = r\,\text{sen}\,\lambda\cos\epsilon + r\,\text{sen}\,l\cos\lambda\,\text{sen}\,\epsilon;$$

sostituendo cioè invece di $\cos\alpha\cos\delta$, $\text{sen}\,\alpha\cos\delta$, $\text{sen}\,\delta$ i loro valori dati dalle equazioni (A) del § 64. Ponendo poi nel secondo membro in luogo di $\cos l\cos\lambda$, $\text{sen}\,l\cos\lambda$, $\text{sen}\,\lambda$ i loro valori precedenti troveremo $x' = r\cos\omega\cos t - r\cos i\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,t$,

$$y' = r\,\text{sen}\,\omega\cos\epsilon\cos t + r(\cos i\cos\epsilon\cos\omega - \text{sen}\,i\,\text{sen}\,\epsilon)\,\text{sen}\,t,$$
$$z' = r\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,\epsilon\cos t + r(\cos i\cos\omega\,\text{sen}\,\epsilon + \text{sen}\,i\cos\epsilon)\,\text{sen}\,t.$$

A questi valori delle coordinate si può dare eziandio la seguente forma più semplice

$$x' = rm\,\text{sen}(t+M),\quad y' = rn\,\text{sen}(t+N),\quad z' = rp\,\text{sen}(t+P);$$

le quantità m, n, p, M, N, P essendo costanti determinate dall' equazioni seguenti

(1) $m\,\text{sen}\,M = \cos\omega$; (2) $m\cos M = -\cos i\,\text{sen}\,\omega$;
(3) $n\,\text{sen}\,N = \cos\epsilon\,\text{sen}\,\omega$; (4) $n\cos N = \cos i\cos\epsilon\cos\omega - \text{sen}\,i\,\text{sen}\,\epsilon$;
(5) $p\,\text{sen}\,P = \text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,\epsilon$; (6) $p\cos P = \cos i\cos\omega\,\text{sen}\,\epsilon + \text{sen}\,i\cos\epsilon$;

le quali sei equazioni determinano le sei costanti in un modo semplicissimo e comodo al calcolo numerico. La specie degli angoli M, N, P si determinerà sempre per modo che le costanti m, n, p risultino positive. Le quantità ϵ, ω, i essendo sottoposte a variazioni *secolari*, vi saranno sottoposte eziandio le costanti m, n, p, M, N, P, ed esse agevolmente si dedurranno dal confronto dei loro valori calcolati in due ipotesi di ϵ, ω, i corrispondenti ad intervalli distanti di 100 anni. Chi bramasse vedere i rapporti che hanno fra loro queste costanti, dovrà consultare un eccellente articolo del sig. dott. Gauss nel Giornale astronomico del sig. Zach più volte citato (*Mon. Corr. May* 1804), ove il lodato autore ha per la prima volta pubblicato questo elegantissimo metodo di calcolare le coordinate eliocentriche di un pianeta rapporto all' equatore, illustrandolo eziandio con esempio numerico.

Problema VIII. Data la posizione eliocentrica di un pianeta, determinare la sua posizione geocentrica, cioè la sua longitudine e latitudine, ovvero la sua AR e declinazione veduta dal centro della terra.

242. Agevolmente deducesi la soluzione di questo problema dalla considerazione delle coordinate rettangole del pianeta e della terra riportate ad uno stesso sistema di assi. Domandisi in primo luogo la longitudine e latitudine geocentrica del pianeta.

Ritenendo perciò le denominazioni precedenti, sia di più la cercata

longitudine geocentrica $= l'$, la sua latitudine $= \lambda'$, la sua distanza dalla terra $= r'$. Sia inoltre la longitudine eliocentrica della terra (che è sempre $=$ longitudine eliocentrica di Sole $- 180^\circ) = L$, la sua distanza dal Sole $= R$, e supponiamo la terra ed il pianeta riferiti a coordinate rettangole tali, che l'asse delle x nel piano dell'eclittica faccia un angolo qualunque h con la linea degli equinozj, da cui si contano le longitudini, l'asse delle y sia a questo perpendicolare nella superficie dell'eclittica, per ultimo l'asse delle z si confonda con l'asse dell'eclittica. Posto ciò, essendo l'origine delle coordinate nel centro del Sole, siano x, y, z le coordinate del centro del pianeta; X, Y quelle del centro della terra, supposto sempre nel piano dell'eclittica. Sieno per ultimo ξ, ν, ζ le coordinate del centro del pianeta per un sistema di assi parallelo al primo, e tale che abbia la sua origine nel centro della terra. Avremo, come si è dimostrato nel § 64, le seguenti equazioni

$$x = r\cos\lambda\cos(l-h),\quad X = R\cos(L-h),\quad \xi = r'\cos\lambda'\cos(l'-h),$$
$$y = r\cos\lambda\,\text{sen}(l-h),\quad Y = R\,\text{sen}(L-h),\quad \nu = r'\cos\lambda'\,\text{sen}(l'-h),$$
$$z = r\,\text{sen}\,\lambda,\qquad \zeta = r'\,\text{sen}\,\lambda'.$$

Osservando che si ha $\xi = x - X$, $\nu = y - Y$, $\zeta = z$, dalle ultime tre, mediante la divisione, otterremo

$$\text{tang}\,(l'-h) = \frac{r\cos\lambda\,\text{sen}\,(l-h) - R\,\text{sen}\,(L-h)}{r\cos\lambda\cos(l-h) - R\cos(L-h)};$$

$$\text{tang}\,\lambda' = \frac{r\,\text{sen}\,\lambda.\text{sen}\,(l'-h)}{r\cos\lambda\,\text{sen}(l-h) - R\,\text{sen}(L-h)} = \frac{r\,\text{sen}\,\lambda\cos(l'-h)}{r\cos\lambda\cos(l-h) - R\cos(L-h)}.$$

Determinati l' e λ', otterremo

$$r' = r\frac{\text{sen}\lambda}{\text{sen}\lambda'} = \frac{r\cos\lambda\,\text{sen}(l-h) - R\,\text{sen}(L-h)}{\cos\lambda'\,\text{sen}\,(l'-h)} = \frac{r\cos\lambda\cos(l-h) - R\cos(L-h)}{\cos\lambda'\cos(l'-h)},$$

nelle quali formule l'angolo h rimane interamente arbitrario. Fra tutti i valori che si possono dare all'angolo h, le seguenti supposizioni somministrano le soluzioni più semplici.

1.° Posto $h = L$, $P = \frac{r\cos\lambda}{R}\,\text{sen}(l-L)$; $Q = \frac{r\cos\lambda\cos(l-L)}{R} - 1$,

avremo $\text{tang}\,(l'-L) = \frac{P}{Q}$,

$$\text{tang}\,\lambda' = \frac{r}{R}\,\frac{\text{sen}\,\lambda\,\text{sen}\,(l'-L)}{P} = \frac{r}{R}\,\frac{\text{sen}\,\lambda\cos(l'-L)}{Q},$$
$$\frac{r'}{R} = \frac{P}{\text{sen}\,(l'-L)\cos\lambda'} = \frac{Q}{\cos(l'-L)\cos\lambda'}.$$

2.° Pongasi $h = l$, e si faccia $P = \frac{R\,\text{sen}\,(l-L)}{r\cos\lambda}$,

$$Q = 1 - \frac{R \cos(l - L)}{r \cos \lambda}, \quad \text{sarà} \quad \tang(l' - l) = \frac{P}{Q},$$

$$\tang \lambda' = \frac{\sen(l' - l) \tang \lambda}{P} = \frac{\tang \lambda \cos(l' - l)}{Q},$$

$$r' = r \frac{\sen \lambda}{\sen \lambda'} = \frac{r P \cos \lambda}{\cos \lambda' \sen(l' - l)} = \frac{r Q \cos \lambda}{\cos \lambda' \cos(l' - l)}.$$

3.° Pongasi per ultimo $h = \frac{1}{2}(l + L)$, si otterrà

$$\tang[l' - \tfrac{1}{2}(l + L)] = \frac{r \cos \lambda + R}{r \cos \lambda - R} \tang \tfrac{1}{2}(l - L),$$

$$\tang \lambda' = \frac{r \sen \lambda \sen[l' - \frac{1}{2}(L + l)]}{(r \cos \lambda + R) \sen \frac{1}{2}(l - L)} = \frac{r \sen \lambda \cos[l' - \frac{1}{2}(L + l)]}{(r \cos \lambda - R) \cos \frac{1}{2}(l - L)},$$

$$r' = r \frac{\sen \lambda}{\sen \lambda'} = \frac{(r \cos \lambda + R) \sen \frac{1}{2}(l - L)}{\cos \lambda' \sen[l' - \frac{1}{2}(l + L)]} = \frac{(r \cos \lambda - R) \cos \frac{1}{2}(l - L)}{\cos \lambda' \cos[l' - \frac{1}{2}(l + L)]}.$$

Determinata la longitudine e latitudine geocentrica con alcuno dei precedenti sistemi di formule, si determinerà poscia la sua AR e declinazione, la sua altezza ed azimut ec. coi metodi esposti nel cap. IV.

L'AR e la declinazione geocentrica di un pianeta possono eziandio agevolmente determinarsi dal confronto delle coordinate rettangole eliocentriche e geocentriche del pianeta e della terra rapporto al piano dell'equatore. Si calcolino in fatti le coordinate eliocentriche del pianeta rapporto all'equatore coi precetti dati al § 241; indi si calcolino le coordinate eliocentriche della terra rapporto allo stesso equatore, e saranno $X = R \cos L$, $Y = R \sen L \cos \epsilon$, $Z = R \sen L \sen \epsilon$. Quindi le coordinate geocentriche del pianeta saranno $x - X$, $y - Y$, $z - Z$, e chiamando α la cercata AR, δ la cercata declinazione, r' la distanza del pianeta dal centro della terra, avremo

$$x - X = r' \cos \delta \cos \alpha, \quad y - Y = r' \cos \delta \sen \alpha, \quad z - Z = r' \sen \delta,$$

donde otterrassi $\tang \alpha = \dfrac{y - Y}{x - X}$, $\tang \delta = \dfrac{z - Z}{y - Y} \sen \alpha = \dfrac{z - Z}{x - X} \cos \alpha$.

Questo modo di calcolare le AR e declinazioni geocentriche riesce molto comodo, massime se alquanti luoghi geocentrici si abbiano da calcolare, poichè allora ottenuti i costanti m, n, p, M, N, P, prontissimo riesce il calcolo delle coordinate eliocentriche del pianeta (*).

243. *Scolio*. Determinati gli elementi dell'orbita ellittica di un pianeta coi metodi precedenti, si potrà ad ogni istante calcolare la posizione geocentrica del medesimo, la quale confrontata con la posizione

(*) Per facilitare il calcolo delle Effemeridi annue dietro i principii qui esposti il signor Weisse ha ridotto in tavole molto comode le coordinate del Sole e dei pianeti nell'opera intitolata: *Coordinatae Mercurii, etc. Cracoviae* 1829.

osservata per lo stesso tempo porgerà l'errore degli elementi. Avendo con tutta cura determinato gli elementi ellittici delle orbite planetarie, confrontando in seguito le osservazioni con il calcolo si trovano alcune piccole anomalie, le quali non possono interamente rifondersi sugli errori delle osservazioni, nè essendo esse d'altronde molto forti (poichè ascendono sempre a piccol numero di minuti) non possono persuadere a rinunziare alla bella ipotesi Copernicana, la quale in tutte le sue parti sì lodevolmente soddisfa ai fenomeni osservati.

La scoperta della gravitazione universale, a cui conducono, come vedremo nel secondo volume, le leggi di Keplero, ha somministrato la spiegazione di queste piccole differenze, e mercè i progressi della meccanica e dell'analisi, i sommi geometri Eulero, d'Alembert, la Grange, la Place, Oriani ed altri hanno sì bene rappresentati i movimenti planetarj, che non si può nella teoria degli antichi pianeti desiderare un accordo maggiore. Quanto ai nuovi pianeti, sono essi stati troppo recentemente scoperti, e dalle osservazioni non si hanno bastanti dati per istabilire la loro teoria fino all'ultimo scrupolo, la quale d'altronde diviene oltremodo difficile in grazia della forte inclinazione delle loro orbite all'eclittica, e della loro grande eccentricità.

Noi abbiamo in tutte le cose precedenti supposto una serie illimitata di osservazioni per potere da quella scegliere le più acconcie alla ricerca dell'orbita. Si comprende però facilmente, che date tre osservazioni, è determinata l'orbita che ad esse soddisfa; la sua investigazione però non è senza difficoltà. I limiti di quest'opera non permettono di potere risolvere questo problema più generale, di cui daremo un saggio nel secondo volume, rimandando per gli ulteriori sviluppi i nostri lettori all'eccellente Trattato del signor dott. Gauss intitolato *Theoria motuum corporum caelestium etc. Hamburgi* 1809, come anche ad una bella e profonda Memoria del signor Mossoti inserita nelle Effemeridi di Milano pegli anni 1817-18. Rilasciando perciò agli studiosi d'Astronomia la lettura delle citate opere, a compimento della teoria dei moti dei pianeti aggiungeremo ancora i seguenti problemi destinati ad investigare la variazione che subiscono le loro posizioni geocentriche per una minima variazione data agli elementi delle orbite ellittiche.

Problema IX. Data una piccola variazione agli elementi dell'orbita ellittica di un pianeta, cioè alla longitudine del perielio, all'eccentricità, al moto medio, alla longitudine del nodo, inclinazione ed epoca, trovare le variazioni corrispondenti dell'anomalia vera, raggio vettore, longitudine e latitudine eliocentrica.

244. Ritenendo le stesse denominazioni del problema precedente, e riguardando le date e cercate variazioni come quantità, delle quali le potenze oltre la prima sieno trascurabili, differenziando logaritmica-

mente l'equazione (2) § 240 $\tang \frac{1}{2} v = \tang (45 + \frac{1}{2} \varphi) \tang \frac{1}{2} E$, si ottiene in virtù dell'equazione (c) § 240

$$d v = \frac{\operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} E} d E + \frac{\operatorname{sen} v}{\cos \varphi} d \varphi = \frac{a \cos \varphi}{r} d E + \frac{\operatorname{sen} v}{\cos \varphi} d \varphi .$$

Ora l'equazione $z = E - e \operatorname{sen} E$, avendo riguardo alle equazioni (3), (c), dà $d E = \frac{a}{r} d z + \operatorname{sen} v \, d \varphi$; introdotto pertanto questo valore di $d E$ in $d v$, si avrà $d v = \frac{a^2 \cos \varphi}{r^2} d z + \frac{a \cos \varphi \operatorname{sen} v}{r} \left(1 + \frac{r}{a \cos^2 \varphi}\right) d \varphi$, la quale, a motivo di $r = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + e \cos v}$, facilmente riducesi alla seguente

$$d v = \frac{a^2 \cos \varphi}{r^2} d z + \frac{\operatorname{sen} v (2 + e \cos v)}{\cos \varphi} d \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In secondo luogo prendendo i logaritmi dell'equazione $r = a (1 - \operatorname{sen} \varphi \cos E)$, e differenziando, dietro facili riduzioni, trovorassi $\frac{d r}{r} = \frac{d a}{a} + \frac{a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} E}{r} d E - \frac{a \cos \varphi \cos E}{r} d \varphi$. Sostituendo ora il valore di $d E$ dato di sopra, ed osservando che $\frac{a \operatorname{sen} E}{r} = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos \varphi}$, otterremo

$$\frac{d r}{r} = \frac{d a}{a} + \frac{a}{r} \operatorname{sen} v \tang \varphi \, d z + \left(\operatorname{sen}^2 v \tang \varphi - \frac{a \cos \varphi \cos E}{r}\right) d \varphi .$$

Ora in virtù dell'equazione $r = a (1 - e \cos E) = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos v}$, si ha $\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}$. Sostituito questo valore nel coefficiente di $d \varphi$, fatte le opportune riduzioni, diviene

$$= - \cos v \frac{1 + e \cos v}{\cos \varphi} = - \frac{a}{r} \cos \varphi \cos v .$$

Quanto al termine $\frac{d a}{a}$, esso può eziandio esprimersi per la variazione del moto medio siderale. In fatti chiamando T il tempo della rivoluzione siderale del pianeta, sarà $T = \frac{360}{n} = \frac{2 \pi}{n}$, essendo n il moto medio diurno siderale. Ma in virtù della terza legge di Keplero si ha $a^3 = h T^2$; dunque $a^3 = 4 h \pi^2 n^{-2}$. Prendendo di questa equazione i logaritmi, ed indi differenziandola, avremo $\frac{d a}{a} = - \frac{2}{3} \frac{d n}{n}$. Dietro queste riduzioni avremo

$$\frac{dr}{r} = -\tfrac{2}{3}\frac{dn}{n} + \frac{a}{r}\,\text{sen}\,v\,\text{tang}\,\varphi\,dz - \frac{a}{r}\cos\varphi\cos v\,d\varphi\text{, ovvero}$$

$$dr = -\tfrac{2}{3}\frac{r\,dn}{n} + a\,\text{sen}\,v\,\text{tang}\,\varphi\,dz - a\cos\varphi\cos v\,d\varphi \quad .\;.\;.\; (2)$$

In terzo luogo per trovare il differenziale della longitudine eliocentrica del pianeta si riprenda l'equazione del § 241
$\text{tang}\,(l-\omega) = \cos i\,\text{tang}\,(v+\pi-\omega)$; si differenzi logaritmicamente, ed otterrassi

$$dl = d\omega - \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,i\,\text{sen}\,2\,(l-\omega)\,di + \frac{\text{sen}\,2\,(l-\omega)}{\text{sen}\,2\,(v+\pi-\omega)}\,(dv + d\pi - d\omega).$$

Ora il triangolo rettangolo *NLl* (*Fig.* 32) dà inoltre le seguenti relazioni

(a) $\text{sen}\,\lambda = \text{sen}\,i\,\text{sen}\,(v+\pi-\omega)$,

(b) $\text{tang}\,\lambda = \text{sen}\,(l-\omega)\,\text{tang}\,i = \text{sen}\,i\cos(l-\omega)\,\text{tang}\,(v+\pi-\omega)$,

(c) $\cos(v+\pi-\omega) = \cos\lambda\cos(l-\omega)$.

Avendo perciò riguardo a queste equazioni, il valore di dl si cangierà nel seguente

$$dl = \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2\lambda}\right)d\omega + \frac{\cos i}{\cos^2\lambda}\,(dv + d\pi) - \text{tang}\,\lambda\cos(l-\omega)\,di.$$

Si chiami H l'epoca dei moti medj; t il numero dei giorni decorsi dall'indicata epoca fino all'istante del calcolo; si avrà evidentemente $z = H + nt - \pi$, e perciò $dz = dH + t\,dn - d\pi$. Introducendo nel valore di dv questa espressione di dz, e sostituendolo poi in quello di dl, otterrassi

$$(3)\quad dl = \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2\lambda}\right)d\omega - \text{tang}\,\lambda\cos(l-\omega)\,di + \frac{a^2\cos i\cos\varphi}{r^2\cos^2\lambda}\,dH$$
$$+ \frac{a^2\cos i\cos\varphi}{r^2\cos^2\lambda}\,t\,dn + \frac{\cos i}{\cos^2\lambda}\left(1 - \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}\right)d\pi + \frac{\cos i\,\text{sen}\,v\,(2+e\cos v)}{\cos\varphi\cos^2\lambda}\,d\varphi,$$

la quale equazione molto semplicemente esprime la variazione della longitudine eliocentrica per le variazioni dei sei elementi dell'orbita.

Per ultimo il differenziale logaritmico dell'equazione (a) darà

$$d\lambda = \cot i\,\text{tang}\,\lambda\,di + \text{tang}\,\lambda\cot(v+\pi-\omega)\,(dv + d\pi - d\omega),$$

la quale in virtù dell'equazione (b) si riduce eziandio alla seguente

$$d\lambda = \text{sen}\,(l-\omega)\,di + \text{sen}\,i\cos(l-\omega)\,(dv + d\pi - d\omega).$$

Introducendo poi in questa equazione il valore di dv, avremo

$$(4)\quad d\lambda = \text{sen}\,(l-\omega)\,di - \text{sen}\,i\cos(l-\omega)\,d\omega + \frac{a^2\cos\varphi\,\text{sen}\,i}{r^2}\cos(l-\omega)\,dH$$
$$+ \frac{a^2\cos\varphi\,\text{sen}\,i}{r^2}\cos(l-\omega)\,t\,dn + \text{sen}\,i\cos(l-\omega)\left(1 - \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}\right)d\pi$$
$$+ \frac{(2+e\cos v)\,\text{sen}\,i\cos(l-\omega)\,\text{sen}\,v}{\cos\varphi}\,d\varphi.$$

245. *Scolio.* Accade sovente che sia data la longitudine eliocentrica del pianeta nell'ecclittica, e ciò ha luogo nelle opposizioni, o nelle congiunzioni dei pianeti. Allora la latitudine λ potendosi calcolare dietro la formula $\tang \lambda = \operatorname{sen}(l_{,} - \omega) \tang i$, per $l_{,}$ indicando la longitudine osservata, varierà soltanto in virtù delle variazioni $d\omega$ e di. Differenziando al solito logaritmicamente questa equazione, otterremo

$$(5)\quad d\lambda = \frac{\operatorname{sen} 2\lambda}{\operatorname{sen} 2i}\, di - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\lambda \cot(l_{,} - \omega)\, d\omega .$$

Problema X. Date le variazioni eliocentriche della longitudine, latitudine e raggio vettore espresse per gli elementi eliocentrici, determinare le corrispondenti variazioni della longitudine l', latitudine λ', e della distanza accorciata del pianeta dalla terra g.

246. Se nelle equazioni del problema VIII ponghiamo $h = 0$, e $r' \cos \lambda' = g$, avremo per determinare le quantità l', λ', g le seguenti equazioni $g \cos l' = x - X$, $g \operatorname{sen} l' = y - Y$, $g \tang \lambda' = z$, le quali danno $\tang l' = \dfrac{y - Y}{x - X}$, $g = \sqrt{[(x - X)^2 + (y - Y)^2]}$, $\tang \lambda' = \dfrac{z}{g}$.

Differenziando quindi logaritmicamente l'equazione $\tang l' = \dfrac{y - Y}{x - X}$, e sostituendo poi i valori di $y - Y$, $x - X$, avremo

$$(a)\quad dl' = \frac{\cos l'}{g}\, dy - \frac{\operatorname{sen} l'}{g}\, dx .$$

Del pari l'equazione $g^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2$ differenziata darà $g\, dg = (x - X)\, dx + (y - Y)\, dy$, che riducesi a

$$(b)\quad dg = \cos l'\, dx + \operatorname{sen} l'\, dy .$$

Per ultimo l'equazione $\tang \lambda' = \dfrac{z}{g}$, differenziata logaritmicamente darà $d\lambda' = \dfrac{\operatorname{sen} \lambda' \cos \lambda'}{z}\, dz - \dfrac{\operatorname{sen} \lambda' \cos \lambda'}{g}\, dg$, la quale, sostituendo i valori di z e di dg, si riduce a

$$(c)\quad d\lambda' = \frac{\cos^2 \lambda'}{g}\, dz - \frac{\operatorname{sen} \lambda' \cos \lambda' \cos l'}{g}\, dx - \frac{\operatorname{sen} \lambda' \cos \lambda' \operatorname{sen} l'}{g}\, dy .$$

Ora le coordinate eliocentriche del pianeta x, y, z essendo date dalle equazioni $x = r \cos \lambda \cos l$, $y = r \cos \lambda \operatorname{sen} l$, $z = r \operatorname{sen} \lambda$, avremo

$$dx = \cos \lambda \cos l\, dr - r \cos \lambda \operatorname{sen} l\, dl - r \operatorname{sen} \lambda \cos l\, d\lambda ,$$
$$dy = \cos \lambda \operatorname{sen} l\, dr + r \cos \lambda \cos l\, dl - r \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} l\, d\lambda ,$$
$$dz = \operatorname{sen} \lambda\, dr + r \cos \lambda\, d\lambda .$$

Introdotti nelle precedenti espressioni i valori di dx, dy, dz, fatte

le convenienti riduzioni, otterremo

$$(6)\ d\,l' = \frac{\cos\lambda\,\mathrm{sen}(l-l')}{g}\,d\,r + \frac{r\cos\lambda\cos(l-l')}{g}\,d\,l - \frac{r\,\mathrm{sen}\lambda\,\mathrm{sen}(l-l')}{g}\,d\lambda,$$

$$(7)\ d\,g = \cos\lambda\cos(l-l')\,d\,r - r\cos\lambda\,\mathrm{sen}(l-l')\,d\,l - r\,\mathrm{sen}\lambda\cos(l-l')\,d\lambda,$$

$$(8)\ d\lambda' = \left(\frac{\mathrm{sen}\,\lambda\cos^2\lambda'}{g} - \frac{\mathrm{sen}\,2\,\lambda'\cos\lambda}{2\,g}\cos(l-l')\right)d\,r$$

$$+\frac{r}{2g}\,\mathrm{sen}\,2\lambda'\cos\lambda\,\mathrm{sen}(l-l')\,d\,l + \left(\frac{r}{g}\cos\lambda\cos^2\lambda' + \frac{r}{2g}\,\mathrm{sen}\,2\lambda'\,\mathrm{sen}\lambda\cos(l-l')\right)d\lambda,$$

nelle quali equazioni sostituendo i valori di $d\,r$, $d\,l$, $d\lambda$ dati nel problema precedente otterremo le variazioni delle quantità relative alla posizione geoecntrica del pianeta espresse per gli elementi dell'orbita.

247. *Scolio*. Se le quantità $d\,l$, $d\lambda$, $d\,r$ sono espresse in minuti secondi, eziandio le quantità $d\,l'$, $d\lambda'$, $d\,g$ rappresenteranno minuti secondi. Ora, qualora le variazioni degli elementi dell'orbita esprimansi per minuti secondi e loro frazioni, i diversi termini, dai quali risultano $d\,l$, $d\lambda$, $d\,r$ sono espressi in secondi, a riserva del termine $-\frac{2}{3}\frac{d\,n}{n}$ contenuto nel valore di $d\,r$, il quale è un numero astratto per essere $d\,n$ ed n espresse nelle stesse unità. Dovrassi perciò moltiplicare per R'' numero dei minuti secondi contenuti nel raggio per ridurlo a secondi, e così l'equazione (2) del problema precedente cangiasi nella seguente

$$d\,r = -\tfrac{2}{3}R''\,r\frac{d\,n}{n} + a\,\mathrm{sen}\,v\,\mathrm{tang}\,\varphi(d\,H + t\,d\,n - d\,\pi) - a\cos v\cos\varphi\,d\,\varphi,$$

ove $\log\frac{2\,R''}{3} = 5,1383338$.

248. *Coroll.* Se il pianeta è in opposizione, od in una congiunzione superiore, si ha $l = l'$; nelle congiunzioni inferiori sarà invece $l = 180 + l'$; pertanto in queste circostanze le equazioni (6), (7), (8) si cangeranno nelle seguenti

$$(9)\ d\,l' = \frac{\pm\,r\cos\lambda}{g}\,d\,l; \qquad (10)\ d\,g = \pm(\cos\lambda\,d\,r - r\,\mathrm{sen}\,\lambda\,d\lambda);$$

$$(11)\ d\lambda' = \frac{\cos\lambda'\,\mathrm{sen}(\lambda\mp\lambda')}{g}\,d\,r + \frac{r}{g}\cos\lambda'\cos(\lambda\mp\lambda')\,d\lambda;$$

nelle quali equazioni devonsi prendere i segni superiori nelle opposizioni e congiunzioni superiori; i segni inferiori nelle congiunzioni inferiori.

La quantità g, che entra nelle equazioni (9), (11) si dovrà calcolare dietro l'equazione $g = \sqrt{[(x-X)^2 + (y-Y)^2]}$, ove sostituendo i valori di x, y, X, Y, ed osservando che nelle opposizioni e

congiunzioni inferiori si ha $l = L$, e nelle congiunzioni superiori $l = 180 + L$, avremo per il primo caso $g = \pm (r \cos \lambda - R)$, dovendosi prendere il segno $+$ per le opposizioni, ed il segno $-$ per le congiunzioni inferiori; e per il secondo caso, cioè per le congiunzioni superiori, $g = r \cos \lambda + R$.

La latitudine geocentrica λ' si calcolerà quindi colla formula $\tang \lambda' = \frac{z}{g} = \frac{r \operatorname{sen} \lambda}{g}$.

Quanto alla latitudine eliocentrica, se per $d\lambda$ vorrassi sostituire il valore dato dall'equazione (5) del problema precedente, si dovrà calcolare λ mediante l'equazione $\tang \lambda = \operatorname{sen}(l - \omega) \tang i$, l rappresentando qui la longitudine eliocentrica vera osservata, come si prescrisse nello scolio della stessa proposizione, e di questa dovrassi far uso tanto nel calcolo dei coefficienti delle indeterminate dL, dII, di, dn, $d\varphi$, $d\omega$, che entrano in dl, dr, $d\lambda$, quanto nel calcolo di λ'. Sostituendo nell'equazione (11) per dr il suo valore dato nello scolio precedente, e per $d\lambda$ quello dell'equazione (5), otterremo $d\lambda'$ dato per la variazione degli elementi dell'orbita nel modo seguente

$$(12)\quad d\lambda' = -\left(\tfrac{2}{3}\frac{rR''}{n} - at \operatorname{sen} v \tang \varphi\right)\frac{\cos\lambda' \operatorname{sen}(\lambda \mp \lambda')}{g}\, dn$$

$$+ \frac{a \operatorname{sen} v \tang \varphi \cos \lambda' \operatorname{sen}(\lambda \mp \lambda')}{g}(dII - d\pi) - \frac{a \cos v \cos \varphi \cos \lambda' \operatorname{sen}(\lambda \mp \lambda')}{g}\, d\varphi$$

$$+ \frac{r \cos \lambda' \cos(\lambda \mp \lambda') \operatorname{sen} 2\lambda}{g \operatorname{sen} 2i}\, di - \frac{r \cos \lambda' \cos(\lambda \mp \lambda') \operatorname{sen} 2\lambda \cot(l - \omega)}{2g}\, d\omega,$$

valendo i segni superiori per le opposizioni e congiunzioni superiori, i segni inferiori per le congiunzioni inferiori.

Problema XI. Correggere gli elementi dell'orbita ellittica di un pianeta già presso a poco conosciuti.

249. Si scelgano tre, ed in generale quante buone osservazioni geocentriche avere si potranno, distribuite per modo che abbraccino tutta l'orbita. Quindi o con le tavole fondate sopra gli elementi approssimati, o dietro gli elementi stessi si calcolino per l'istante di ogni osservazione le quantità l, λ, r, l', λ', g dietro i precetti dati nei problemi precedenti. Se i valori di l', λ' uguagliano rispettivamente la longitudine e la latitudine geocentrica osservata in ogni osservazione, gli elementi non abbisogneranno di alcuna correzione. Ma se, come il più delle volte accaderà, fra il calcolo e l'osservazione vi è qualche differenza, allora si calcoleranno per ogni osservazione i valori di dl' e di $d\lambda'$ dietro le formule ed i precetti esposti nel problema precedente. Si formeranno quindi per ogni osservazione le seguenti equazioni di condizione

longitud. osservata $= l' + d\,l'$; latit. geoc. osserv. $= \lambda' + d\,\lambda'$, le quali sviluppate a dovere conterranno le sei indeterminate $d\,\Pi$, $d\,n$, $d\,\varphi$, $d\,\pi$, $d\,\omega$, $d\,i$, tutte al primo grado.

Se le prescelte osservazioni saranno tre di numero, le equazioni di condizione che esse porgeranno saranno sei, dalle quali si dedurranno i valori delle sei incognite: se poi le osservazioni in generale saranno in numero m, le equazioni di condizione saranno $2\,m$, le quali risolute col metodo dei minimi quadrati esposto al § 111 porgeranno le cercate correzioni degli elementi dell'orbita del pianeta. Queste correzioni aggiunte secondo i loro segni agli elementi approssimati già noti, daranno gli elementi corretti. Che se i valori di queste correzioni risultassero troppo considerabili, sicchè le loro seconde potenze non fossero del tutto trascurabili, converrebbe allora riguardare gli ultimi elementi corretti, come al vero molto più prossimi, e riprincipiando sopra di essi un nuovo calcolo, determinare le nuove loro correzioni. Così sempre con facilità si perverrà alla scoperta dei veri elementi ellittici.

250. *Scolio I.* Se già si conoscono le ineguaglianze del moto ellittico del pianeta prodotte dalle attrazioni degli altri pianeti, si applicheranno queste alle posizioni del moto ellittico, ed in seguito coi valori di l, λ, r corretti dalle perturbazioni si calcoleranno i valori di l', λ', $d\,l'$, $d\,\lambda'$, e quindi si formeranno le equazioni di condizione. Quando poi fossero ancora incognite le dette ineguaglianze, si principierà dal trascurarle interamente, e dopo aver determinati gli elementi ellittici, che soddisfanno per quanto è possibile alle osservazioni, si calcoleranno col loro mezzo le perturbazioni che soffre per l'attrazione degli altri pianeti, giusta i metodi che vengono esposti nella Meccanica celeste, ed indi di nuovo correggendo gli elementi ellittici, avuto riguardo alle calcolate ineguaglianze, si giungerà a determinare i veri elementi del moto del pianeta intorno al Sole, i quali corretti e verificati che sieno, serviranno a costruire le tavole dei moti medj, dell'equazione del centro, raggio vettore e latitudine eliocentrica ad oggetto di poter più speditamente calcolare la sua posizione geocentrica ad ogni istante.

251. *Scolio II.* Le osservazioni che presentano maggior sicurezza nei risultamenti, ed una maggiore speditezza, sono le opposizioni per li pianeti superiori, e le congiunzioni per li pianeti inferiori. In queste circostanze la longitudine geocentrica osservata uguagliando l'eliocentrica, si calcolerà in primo luogo la longitudine eliocentrica dietro i dati elementi, la latitudine colla formula $\tan \lambda = \operatorname{sen}(l_{,} - \omega) \tan i$, $l_{,}$ essendo qui la longitudine eliocentrica osservata, ed in seguito, dietro le equazioni (3), (12) calcolando i valori di $d\,l$, $d\,\lambda'$, formeremo le seguenti equazioni di condizione

longitudine elioeentrica osservata $l_{,} = l + d\,l$,
latitudine geocentrica osservata . . $= \lambda' + d\lambda'$,
le quali numericamente calcolate per ogni osservazione, e risolute col metodo dei minimi quadrati daranno le correzioni degli elementi.

Problema XII. Assegnare ad un dato tempo t la celerità geocentrica di un pianeta tanto in longitudine quanto in latitudine.

252. Sapendosi dalla meccanica che nei moti varii la celerità alla fine del tempo t, è espressa da $\left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)$, essendo s lo spazio percorso, ritenute le denominazioni dei problemi precedenti, sarà la celerità geocentrica del pianeta in longitudine $= \left(\frac{d\,l'}{d\,t}\right)$, ed in latitudine $= \left(\frac{d\,\lambda'}{d\,t}\right)$. Posto ciò, riprendiamo le tre equazioni

$$g^2 = (y - Y)^2 + (x - X)^2;\quad \operatorname{tang} l' = \frac{y - Y}{x - X};\quad \operatorname{tang} \lambda' = \frac{z}{g} = \frac{r \operatorname{sen} \lambda}{g},$$

differenziandole rapporto al tempo, ed osservando che $y - Y = g \operatorname{sen} l'$, $x - X = g \cos l'$, con le debite riduzioni otterremo

$$\left(\frac{d\,g}{d\,t}\right) = \cos l' \left[\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right) - \left(\frac{d\,X}{d\,t}\right)\right] + \operatorname{sen} l' \left[\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right) - \left(\frac{d\,Y}{d\,t}\right)\right],$$

$$g\left(\frac{d\,l'}{d\,t}\right) = \cos l' \left[\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right) - \left(\frac{d\,Y}{d\,t}\right)\right] - \operatorname{sen} l' \left[\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right) - \left(\frac{d\,X}{d\,t}\right)\right],$$

$$r'^2\left(\frac{d\lambda'}{d\,t}\right) = r g \cos\lambda \left(\frac{d\lambda}{d\,t}\right) + g \operatorname{sen}\lambda \left(\frac{d\,r}{d\,t}\right) - r \operatorname{sen}\lambda \cos l' \left[\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right) - \left(\frac{d\,X}{d\,t}\right)\right]$$
$$- r \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen} l' \left[\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right) - \left(\frac{d\,Y}{d\,t}\right)\right],$$

dove si è riposto nel primo membro in luogo di $g : \cos\lambda'$ il suo valore r', che rappresenta la distanza assoluta del pianeta dalla terra.

Ponendo ora per $\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)$, $\left(\frac{d\,X}{d\,t}\right)$, $\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)$, $\left(\frac{d\,Y}{d\,t}\right)$ i loro valori dedotti dalle equazioni $x = r \cos\lambda \cos l$, $y = r \cos\lambda . \operatorname{sen} l$, $X = R \cos L$, $Y = R \operatorname{sen} L$, fatte le convenienti riduzioni, otterremo

$$g\left(\frac{dl'}{dt}\right) = \cos\lambda \operatorname{sen}(l - l')\left(\frac{dr}{dt}\right) + r\cos\lambda\cos(l - l')\left(\frac{dl}{dt}\right) - r\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}(l - l')\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)$$
$$- \operatorname{sen}(L - l')\left(\frac{d\,R}{d\,t}\right) - R\cos(L - l')\left(\frac{d\,L}{d\,t}\right);$$

$$r'^2\left(\frac{d\lambda'}{dt}\right) = r[g\cos\lambda + r\operatorname{sen}^2\lambda\cos(l - l')]\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) + \operatorname{sen}\lambda[g - r\cos\lambda\cos(l - l')]\left(\frac{dr}{dt}\right)$$
$$+ r^2\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda\operatorname{sen}(l - l')\left(\frac{dl}{dt}\right) + r\operatorname{sen}\lambda\cos(L - l')\left(\frac{dR}{dt}\right) - Rr\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}(L - l')\left(\frac{dL}{dt}\right).$$

I valori di $\left(\frac{dr}{dt}\right)$, $\left(\frac{dl}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)$ contenuti in queste formule si avranno dalle espressioni generali di dr, dl, $d\lambda$ dati dalle equazioni (2), (3), (4) § 244 prendendo in esse soltanto quei termini che variano col tempo da un istante all'altro, ossia i termini dipendenti dalla longitudine media, ovvero dalla anomalia media. Ponendo pertanto il moto medio diurno del pianeta $= n$, avremo evidentemente (assumendo il giorno medio per unità di misura del tempo)

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = a\,n \operatorname{sen} v \operatorname{tang} \varphi\,; \quad \left(\frac{dl}{dt}\right) = \frac{a^2 \cos i \cos \varphi}{r^2 \cos^2 \lambda}\, n\,;$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) = \frac{a^2 \cos \varphi \operatorname{sen} i \cos (l - \omega)}{r^2}\, n\,.$$

I valori di $\left(\frac{dR}{dt}\right)$, $\left(\frac{dL}{dt}\right)$ si otterranno dai precedenti cambiando le quantità relative al pianeta in quelle che sono relative alla terra. Ponendo quindi l'eccentricità dell'orbita terrestre $= \operatorname{sen} \Phi$, il suo moto medio diurno $= m$, osservando inoltre che $\lambda = 0$, $i = 0$, perchè essa si muove nel piano dell'eclittica, ed il semiasse maggiore della sua orbita è $= 1$, avremo $\left(\frac{dR}{dt}\right) = m \operatorname{sen} V \operatorname{tang} \Phi\,;$ $\left(\frac{dL}{dt}\right) = \frac{m \cos \Phi}{R^2}\,;$ ove V esprime l'anomalia vera della terra per il momento del calcolo.

Fatte queste differenti sostituzioni nelle due precedenti equazioni, si cangeranno nelle seguenti

$$(13)\quad g\left(\frac{dl'}{dt}\right) = a\,n \operatorname{tang} \varphi \operatorname{sen} v \cos \lambda \operatorname{sen} (l - l') + \frac{a^2\, n \cos i \cos \varphi \cos (l - l')}{r \cos \lambda}$$
$$- \frac{n\,a \operatorname{sen} i \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} (l - l') \cos (l - \omega)}{r} - \frac{m \cos (L - l') \cos \Phi}{R}$$
$$- m \operatorname{sen} V \operatorname{tang} \Phi \operatorname{sen} (L - l')\,;$$

$$(14)\quad r'^2\left(\frac{d\lambda'}{dt}\right) = \frac{a\,n \operatorname{sen} i \cos \varphi \cos (l - \omega)}{r} [g \cos \lambda + r \operatorname{sen}^2 \lambda \cos (l - l')]$$
$$+ a\,n \operatorname{tang} \varphi \operatorname{sen} v \operatorname{sen} \lambda [g - r \cos \lambda \cos (l - l')] + a^2 n \cos i \cos \varphi \operatorname{tang} \lambda \operatorname{sen} (l - l')$$
$$+ m\,r \operatorname{tang} \Phi \operatorname{sen} V \operatorname{sen} \lambda \cos (L - l') - \frac{m\,r \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} (L - l') \cos \Phi}{R}\,.$$

253. *Coroll. I.* Se si tratti di un pianeta superiore in opposizione col Sole avrassi $l - l' = 0$, $L - l' = 0$, e però quelle formule generali si cangeranno nelle seguenti più semplici

$$(13)'\quad g\left(\frac{dl'}{dt}\right) = \frac{m}{R}\left(-\cos \Phi + \frac{a^2 n}{m}\,\frac{R}{r}\,\frac{\cos i \cos \varphi}{\cos \lambda}\right);$$

$$(14)' \quad r'^2 \left(\frac{d\lambda'}{dt}\right) = \frac{a^2 n \,\text{sen}\, i \cos\varphi \cos(l-\omega)}{r} (g \cos\lambda + r\,\text{sen}^2\lambda)$$

$$+ a n \,\text{tang}\, \varphi \,\text{sen}\, v \,\text{sen}\, \lambda (g - r\cos\lambda) + m r \,\text{tang}\, \Phi \,\text{sen}\, V \,\text{sen}\, \lambda .$$

Simili semplificazioni si otterranno per le congiunzioni tanto inferiori che superiori, nelle quali $l-l$, $L-l'$ divengono uguali 0°, ovvero 180°.

254. *Coroll. II.* Se piacesse di riguardare le orbite dei pianeti come circolari, e se inoltre si volessero trascurare le seconde dimensioni delle inclinazioni, il che è sensibilmente permesso per Venere, la Terra, Marte, Giove, Saturno ed Urano, dovremo porre $\Phi = 0$, $\varphi = 0$, $R = 1$, $r = a$, $\cos i = \cos\lambda = 1$, nel qual caso esse divengono

$$(13)'' \quad g\left(\frac{dl'}{dt}\right) = m\left(-\cos(L-l') + a\frac{n}{m}\cos(l-l')\right);$$

$$(14)'' \quad r'^2\left(\frac{d\lambda'}{dt}\right) = m\left(-a\,\text{sen}\,\lambda\,\text{sen}\,(L-l') + a\frac{n}{m} g \,\text{sen}\, i \cos(l-\omega) + a^2\frac{n}{m}\,\text{tang}\,\lambda\,\text{sen}\,(l-l')\right),$$

ove in virtù della terza legge di Keplero si può scrivere $\sqrt{\frac{1}{a}}$ in luogo della quantità $a\frac{n}{m}$.

CAPITOLO XVIII.

Regole da seguirsi nel calcolo delle osservazioni dei pianeti.

255. Le osservazioni, sopra le quali abbiamo nei §§ precedenti fondato la teoria dei pianeti, si suppongono fatte da un osservatore situato nel centro della terra nell'ipotesi che fosse questa priva di atmosfera, e riferite all'equinozio medio di primavera. Qualora adunque vogliasi confrontare un'osservazione con le tavole rappresentanti il moto dei pianeti, o, ciò che è lo stesso, cogli elementi, sui quali queste tavole sono costruite, conviene prima di tutto riferirla al centro della terra, ed alla posizione media dell'equinozio, spogliandola inoltre dell'effetto della rifrazione.

Osservazioni fatte nel meridiano.

256. Siasi in primo luogo osservato un pianeta nel suo passaggio pel meridiano, e se ne voglia dedurre la sua posizione apparente, ed indi la sua posizione geocentrica, ridotta come sopra abbiamo indicato.

Si osservi qualche poco prima o dopo il passaggio del pianeta pel

meridiano eziandio il passaggio di una o più stelle ben conosciute, ed inscrite nei migliori cataloghi, come per esempio in quello del celebre Piazzi, registrando il tempo dell'orologio, in cui trovansi sul meridiano, e le loro distanze dal zenit. In seguito si calcolino l'AR apparenti delle stelle, e le loro declinazioni, le quali si otterranno se alle loro posizioni medie date dal catalogo si aggiungerà l'effetto dell'aberrazione e della nutazione dietro i precetti che esporremo nel secondo volume. Le AR ridotte in tempo, e confrontate cogl'istanti osservati nell'orologio regolato al tempo siderale, porgeranno la correzione che deve farsi al medesimo, affinchè noti le AR apparenti. Questa correzione, appellata *equazione del pendolo*, sommata col suo segno all'istante osservato del passaggio pel meridiano porgerà l'AR apparente del pianeta.

Per dedurre eziandio la declinazione apparente del pianeta conviene in primo luogo determinare l'errore del principio di numerazione del quadrante, di cui ci saremo serviti nelle osservazioni delle distanze dal zenit. Si deducano dalle declinazioni apparenti delle stelle già calcolate le loro distanze dal zenit. Quindi dietro lo stato particolare dell'atmosfera indicato dal barometro e dal termometro, si correggano le distanze osservate tanto delle stelle, come del pianeta dall'effetto della rifrazione dietro i precetti che verranno esposti nel capitolo delle rifrazioni astronomiche. Le distanze osservate delle stelle così ridotte confrontate con le calcolate, daranno l'errore del principio di numerazione dello stromento, il quale da tutte dovrà risultare lo stesso se sia esattamente diviso, e le osservazioni fatte con cura. Se poi per li piccoli errori delle divisioni e delle osservazioni vi è qualche differenza fra i risultamenti, si prenderà il medio di tutti, e si correggerà con esso la distanza osservata del pianeta dal zenit, la quale liberata che sia dalla rifrazione, si confronterà con la latitudine dell'osservatore, e darà la sua declinazione apparente veduta dalla superficie terrestre.

Che se sia stata osservata la distanza del pianeta dal zenit coll'ajuto di un circolo moltiplicatore a livello fisso, o a livello mobile, sarà essa in allora libera da qualunque errore relativo al principio di numerazione, come risulta dalla particolare costruzione di sì fatte macchine, nè di altra correzione abbisognerà che di quella relativa alla rifrazione.

257. L'AR così dedotta dalle osservazioni fatte sul meridiano è evidentemente quale da un osservatore situato nel centro della terra sarebbe veduta. La declinazione però abbisogna di un'altra piccola correzione dipendente dalla paralasse diurna. Sia in fatti (*Fig.* 23) l'osservatore situato nella superficie terrestre in A, il pianeta in L. Sarà questi riferito nel verticale ZAL in un punto l' del cielo stel-

lato, mentre dall'osservatore situato in C al centro della terra sarebbe riferito in l. Si proverà qui, come nel § 162, che l'angolo L appellato *paralasse del pianeta* è $= \frac{r}{d}$ sen Z, r rappresentando il raggio terrestre, d la distanza del pianeta dal centro della terra; Z la distanza apparente del pianeta dal zenit, che differisce sempre di pochi secondi dalla vera.

La quantità $\frac{r}{d}$ rappresenta la paralasse orizzontale del pianeta, ed essa è l'angolo, sotto cui alla distanza d sarebbe veduto il raggio terrestre. Se poniamo $d = 1$ dobbiamo ottenere la paralasse orizzontale del Sole nella sua media distanza, che nelle tavole solari del sig. de Lambre trovasi $= 8'',8$; così $r = 8'',8$, e però l'effetto della paralasse nella distanza Z dal zenit sarà $= \frac{8'',8}{d}$ sen Z, d essendo espresso in parti tali che la distanza media della terra dal Sole sia $= 1$. Ottenuta così la paralasse in altezza si toglierà dalle declinazioni australi, e si aggiungerà alle boreali per ridurle a quelle che sarebbero vedute nel centro della terra.

Osservazioni fuori del meridiano.

258 Per determinare la posizione degli astri col mezzo di *osservazioni* fatte fuori del meridiano, servonsi gli Astronomi o di un quadrante mobile con un circolo azimutale, o di una macchina equatoriale, o di un semplice cannocchiale montato in un robusto piede, e munito di un micrometro.

Se vorrassi far uso di un quadrante mobile si osserverà in primo luogo la distanza dal zenit, e l'azimut di una stella, ed il tempo corrispondente in un orologio siderale ben regolato, di cui l'equazione sia stata già esplorata e conosciuta. Liberata quindi la distanza osservata della nota stella dall'effetto della rifrazione, trascurata la paralasse per essere insensibile nelle stelle situate a distanza pressochè infinita, si calcoli per il dato tempo la posizione apparente della stella, e quindi, dietro le formule del § 20, si calcoli eziandio la distanza della stella dal zenit, ed il suo azimut, le quali quantità confrontate colle corrispondenti osservate daranno i rispettivi errori relativi alla posizione dello stromento. Si applichino questi errori alla distanza osservata del pianeta dal zenit, ed al suo azimut. Si aggiunga quindi la rifrazione, e si tolga la paralasse di altezza dalla distanza così ridotta, si avrà la vera distanza dell'astro dal zenit, come sarebbe veduta dal centro della terra. Quanto all'azimut nessuna correzione occorre di

fare, poichè tanto la paralasse che la rifrazione essendo comprese in un piano verticale non alterano gli azimuti, per lo meno considerando la terra come sferica, il che non induce sensibile errore nelle osservazioni dei pianeti. Ottenuta così la vera altezza ed il vero azimut del pianeta, dalla risoluzione del triangolo SZP (*Fig.* 13), in cui si conosce $SZ =$ distanza vera dal zenit, $ZP =$ complemento di latitudine, $SZP =$ azimut, si otterrà l'angolo orario SPZ, il quale (aggiunto o tolto dal tempo sidereo corrispondente all'osservazione secondo che l'astro sarà avanti o dopo il suo passaggio pel meridiano) darà l'AR apparente geocentrica del pianeta, e il lato SP, il cui complemento sarà la cercata declinazione geocentrica.

259. Negli Osservatorj muniti di un buon equatoriale, speditamente e comodamente determinasi la posizione di un astro rapporto all'equatore dietro i precetti dei §§ 42, 43, osservando le differenze di AR e di declinazione con le stelle vicine ben conosciute. Queste differenze però sono affette dalla paralasse diurna e dalla rifrazione; però qualora si aspiri a tutta la precisione, conviene applicare alle osservazioni fatte alle macchine equatoriali le correzioni dipendenti da ambedue le nominate cause, al che sempre si perverrà facilmente nel modo che ora esporremo.

Rappresenti AB (*Fig.* 53) il meridiano celeste del luogo in cui è situata la macchina equatoriale; A sia il zenit; B il polo boreale dell'equatore; C sia l'astro verso cui è diretto il centro del cannocchiale. L'orologio astronomico situato appresso la macchina segni un tempo t tale che se k rappresenta l'equazione dell'orologio il tempo sidereo sia $= t + k$. Se chiamiamo α l'AR dell'astro C, δ la sua declinazione, l'angolo orario $ABC = H$, saranno δ ed H dati immediatamente dalle divisioni dei circoli di declinazione, ed equatoriale della macchina. Essendo poi d'altra parte l'angolo orario $= t + k - \alpha$, avremo $\alpha = t + k - H$.

Questo è vero facendo astrazione dalla rifrazione e dalla paralasse. Ora sì l'una che l'altra tendono a far variare la distanza dell'astro dal zenit nel verticale AC, lasciando inalterato l'azimut, la rifrazione aumentando la distanza dal zenit, e la paralasse diminuendola. Se fingiamo pertanto che la paralasse orizzontale sia $= p$, la rifrazione dell'astro all'altezza h sopra l'orizzonte sia $= r$, quando egli apparisce in C, sarà realmente in C' per modo che sia $CC' = r - p \cos h$, e quindi il vero angolo orario non sarà ABC misurato nel circolo equatoriale, ma $ABC' = H + dH$, e la vera declinazione non sarà $\delta = 90 - BC$, come nel circolo di declinazione si osserva, ma sarà $= 90 - BC' = \delta - d\delta$. I valori di dH e $d\delta$ agevolmente si otterranno dalle formule differenziali (a), (b) (Trig. XVI), facendo in esse $a = 90 - \delta$, $da = - d\delta$, $dc = 0$, $B = H$, $c = 90 - L$, essendo L

la latitudine dell'osservatore, $b = 90 - h$, $db = r - p \cos h$, $dA = o$. L'equazione (a) darà $d\delta = -db \cos C$; l'equazione (b) sostituendo per da il suo valore $db \cos C$, darà $db \operatorname{sen}^2 C = \cos\delta \operatorname{sen} C dB$, e quindi $dB = dH = \frac{db \operatorname{sen} C}{\cos\delta}$. Chiamando pertanto α', δ' l'AR e la declinazione dell'astro ottenuta dall'osservazione diretta nella macchina α, δ le stesse quantità corrette dalla rifrazione e paralasse, si avrà

$$\delta = \delta' - (r - p \cos h) \cos C, \quad \alpha = \alpha' - \frac{\operatorname{sen} C}{\cos\delta}(r - p \cos h).$$

Le quantità h, C racchiuse in queste formule non sono date immediatamente dall'osservazione; esse però si potranno sempre agevolmente dedurre dalle due seguenti equazioni

$$\cos h \operatorname{sen} C = \cos L \operatorname{sen} H; \ \cos h \cos C = \operatorname{sen} L \cos\delta - \cos L \operatorname{sen}\delta \cos H,$$

che risultano dalla risoluzione del triangolo ABC. È bene osservare che tutti i calcoli relativi a queste correzioni si possono eseguire con quattro, od al più cinque cifre decimali. Mediante le riferite equazioni si calcoleranno le correzioni delle AR e delle declinazioni tanto per i pianeti come per le stelle di confronto (per le quali sarà $p = o$), ed avendo inoltre riguardo alle correzioni che possono aver luogo per una deviazione della macchina dal suo vero posto, delle quali abbiamo trattato nel capitolo II, si potrà assegnare mediante un buon equatoriale con ogni sicurezza la posizione dei pianeti e delle comete quando per qualunque circostanza non si possa osservare il loro passaggio pel meridiano.

260. Qualora si manchi di quadrante mobile e di macchina equatoriale, od anche quando queste macchine non siano della precisione e stabilità necessaria per procurare delle buone osservazioni, allora si ha ricorso ai micrometri per determinare la posizione degli astri incogniti rapporto all'equatore. Appellansi *micrometri* quei meccanesimi che adattati al fuoco di un cannocchiale sono valevoli a determinare la differenza di AR e di declinazione di due astri, i quali per la rotazione diurna vengono in successivi tempi ad attraversare il suo campo, mentre esso mantiensi in una posizione invariabile durante l'osservazione.

Variano i metodi che devonsi seguire nella riduzione delle osservazioni fatte a tal sorta d'istromenti secondo i principj, dietro i quali sono costruiti. Non è nostra intenzione di qui descrivere tutti i micrometri, dei quali fanno uso gli Astronomi nelle loro osservazioni. Di quelli solo che sono più in uso ai nostri giorni, e per la loro semplicità molto commendevoli, daremo qui una succinta descrizione, indicando i metodi che seguire si devono per la riduzione delle osservazioni in ciascuno di essi, rimandando i nostri leggitori per la descri-

zione ed uso degli altri ai trattati d'Astronomia dei signori la Lande e de Lambre.

261. *Micrometro a filo mobile*. Rappresenti (*Fig.* 54) il circolo descritto col centro C il campo visibile del cannocchiale; $HRQG$ una cassa rettangolare, che si applica al tubo dell'oculare; AB, PS due fili sottilissimi di rame, d'argento, e anche (se il cannocchiale ha un forte ingrandimento) di seta, o di ragno fissi nei lati di questa cassa; $H'R'Q'G'$ una cassa interna che scorre lungo i lati della precedente, venendo guidata dalla vite OG'; MN è un filo applicato ai lati $H'Q'$, $R'G'$ della cassa mobile, il quale viene da essa trasportato per tutto il campo del cannocchiale in modo che rimanga sempre al filo AB paralello. I passi della vite OG' devono essere perfettamente uguali; così ad ogni rivoluzione della vite il filo MN si avvicina ad AB, o se ne allontana di un'eguale quantità. La rivoluzione della vite viene da un indice indicata nel circolo O, il quale è diviso in parti uguali, per lo più in numero di 100. Questa cassetta deve per modo applicarsi al tubo dell'oculare, che i fili rimangano nel foco del medesimo; indi il tubo oculare deve applicarsi al tubo dell'obbiettivo, sicchè gli stessi fili trovinsi nel foco del cannocchiale, affinchè possano essere distintamente veduti senza ottica paralasse.

Conviene prima di tutto determinare il valore delle parti del micrometro, al che si può sempre pervenire osservando le parti che si devono far passare, perchè il filo MN si allontani da AB di un angolo dato, come per esempio del diametro del Sole. Il numero dei secondi contenuti nell'angolo misurato diviso per il numero delle parti osservate darà il valore di ciascheduna ridotto a minuti secondi di arco.

Qualora si voglia far uso di un tal micrometro conviene rivolgere il cannocchiale verso l'astro, di cui si vuole determinare la posizione, e girare il tubo dell'oculare finchè il filo AB sia paralello all'equatore, ossia finchè l'astro col suo moto diurno lo segua esattamente. Allora il filo SP, che per costruzione è ad AB perpendicolare, rappresenta il circolo di declinazione condotto per il centro C, e tutti gli astri che attraversano il campo del cannocchiale sembreranno descrivere corde paralelle ad AB. In questo stato di cose si faccia percorrere all'astro incognito il filo AB esattamente, e notisi il tempo, in cui perviene in C al filo di declinazione. Quindi senza alterare la posizione del cannocchiale, quando un astro conosciuto entra nel campo del medesimo, si porti sopra di esso il filo mobile MN numerando esattamente le rivoluzioni intere, e centesimi di rivoluzione, che si devono svolgere dalla vite OG' per condurre il filo mobile dalla posizione AB alla corda MN percorsa dall'astro nel cannocchiale, e si osservi eziandio il tempo in cui giunge al filo PS. Egli è ora evidente che le parti numerate dalla vite OG' ridotte in minuti e se-

condi daranno la differenza di declinazione dei due astri; e la differenza dei tempi osservati nel passaggio di ambedue allo stesso circolo di declinazione PS ridotta in arco darà la differenza delle AR. Si osservi di più se l'astro conosciuto è passato per il campo del cannocchiale sopra o sotto il centro. Nel primo caso egli avrà una minore declinazione, nel secondo ne avrà una maggiore, supponendo, come accade negli stromenti astronomici, che il cannocchiale presenti gli oggetti rovesciati.

262. Le AR e declinazioni determinate con questo metodo devono ancora spogliarsi dall'effetto della rifrazione e della paralasse. La correzione dipendente dalle rifrazioni è per lo più trascurabile, poichè attraversando i due astri il campo del cannocchiale, che è sempre di pochi minuti, vengono all'incirca osservati in una medesima altezza, e perciò sottoposti all'istessa rifrazione assoluta; quindi le rifrazioni in AR ed in declinazione essendo presso a poco le medesime, le differenze osservate ne saranno pressochè indipendenti. Quanto poi alla paralasse, se fingiamo un pianeta confrontato con una stella fissa, non avendo questa paralasse sensibile, le AR e declinazioni di quello dovranno per intero correggersi dall'effetto della paralasse. Siccome però anche per una piccola variazione in altezza, nelle vicinanze dell'orizzonte sono molto sensibili le variazioni delle rifrazioni, così rendesi necessario esaminare l'indole di queste correzioni, e noi principieremo da quelle dipendenti dalle rifrazioni.

Siano rapporto al primo astro a, d l'AR e declinazione apparente osservata; α, δ quelle corrette dalla rifrazione; C l'angolo parallattico compreso fra il verticale e circolo di declinazione; H l'angolo orario comune ai due astri osservati; r la rifrazione nell'altezza h, in cui trovasi l'astro nella prima osservazione. Siano per il secondo astro le medesime quantità indicate da a', d', α', δ', C', H, h', r'. Per i ragionamenti fatti al § 259 avremo

$$\alpha = a - \frac{r \operatorname{sen} C}{\cos \delta'} ; \quad \alpha' = a' - \frac{r' \operatorname{sen} C'}{\cos \delta} ; \quad \delta = d - r \cos C ; \quad \delta' = d' - r' \cos C',$$

dalle quali deducesi

$$\delta = \delta' + d - d' - r \cos C + r' \cos C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\alpha = \alpha' + a - a' - \frac{r \operatorname{sen} C}{\cos \delta} + \frac{r' \operatorname{sen} C'}{\cos \delta'} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

nelle quali $a - a'$, $d - d'$ sono le differenze di AR e di declinazione date dall'osservazione. Le quantità r, r' dipendono dalle altezze h, h' dei due astri al momento delle due osservazioni; le quantità h, C, h', C' si determineranno molto speditamente dalle equazioni (§ 259)

$$\left.\begin{array}{l} \cos h \operatorname{sen} C = \cos L \operatorname{sen} H \\ \cos h \cos C = \operatorname{sen} L \cos \delta - \cos L \operatorname{sen} \delta \cos H \\ \cos h' \operatorname{sen} C' = \cos L \operatorname{sen} H \\ \cos h' \cos C' = \operatorname{sen} L \cos \delta' - \cos L \operatorname{sen} \delta' \cos H \end{array}\right\} \quad (A)$$

Se ora ponghiamo $r' = r + g$, $\delta' = \delta - y$, $C' = C - x$, considerando r di primo ordine, sarà g di secondo ordine, x ed y di primo; perciò trascurando le quantità di terzo ordine, fatte le convenienti riduzioni, riponendo per x, g ed y i loro valori, ed osservando potersi porre $C - C' = \operatorname{sen}(C - C')$, $\delta - \delta' = \operatorname{sen}(\delta - \delta')$, otterremo

$$\delta = \delta' + d - d' + (r' - r)\cos C + r \operatorname{sen}(C - C') \operatorname{sen} C \; . \; . \; . \; (1)'$$

$$\alpha = \alpha' + a - a' + \frac{(r' - r)\operatorname{sen} C}{\cos \delta} - \frac{r' \operatorname{sen}(\delta - \delta') \operatorname{tang} \delta}{\cos \delta} \operatorname{sen} C - \frac{r \cos C \operatorname{sen}(C - C')}{\cos \delta} \quad (2)'$$

Se l'astro ha una piccola altezza sopra l'orizzonte, l'angolo C per una piccola variazione nell'altezza varia pochissimo, come agevolmente raccogliesi dalle equazioni (A); per le maggiori altezze, r diviene sempre di più in più piccolo; perciò si potranno senza errore trascurare i termini moltiplicati per $\operatorname{sen}(C - C')$ nelle due precedenti equazioni. Sarà pertanto inutile il calcolo delle quantità h', C', e solo basterà calcolare h, C dietro le prime due equazioni (A), nelle quali per maggiore esattezza si potrà scrivere $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$ in luogo di δ. Per ottenere però la differenza $r' - r$ delle due rifrazioni conviene conoscere la differenza $h - h'$ delle due altezze, la quale si ha dalla formula $h - h' = (\delta - \delta')\cos C$, che tosto deducesi dall'equazione (b) (Trig. XVI) ponendo in essa, come nel caso presente accade, $db = h - h'$, $da = \delta - \delta'$, $dc = 0$, $dB = 0$. Determinato h ed $h - h'$, le tavole di rifrazione daranno la differenza $r' - r$, di cui si ha bisogno nel calcolo delle equazioni (1)', (2)', quando ponesi $C - C' = 0$. Del resto, se in qualche raro caso si aspiri all'ultima precisione, converrà calcolare dietro le quattro equazioni (A) le quantità h, h', C, C'; indi le equazioni (1), (2) daranno senza difficoltà le cercate quantità α, δ.

Quanto alle correzioni dipendenti dalla paralasse esse si deducono da ciò che abbiamo detto nel § 259, ponendo $r = 0$. Sostituendo poi i valori di $\cos h \operatorname{sen} C$, $\cos h \cos C$ dati dalle equazioni (A) avremo

$$\alpha = a + \frac{p \cos L \operatorname{sen} H}{\cos \delta}; \quad \delta = d + p \operatorname{sen} L \cos \delta - p \cos L \operatorname{sen} \delta \cos H.$$

263. *Micrometro circolare*. Sia (*Fig.* 55) $PMSQ$ il campo visibile del cannocchiale, dentro del quale sia sospesa l'armilla circolare $ABFG$ situata nel foco. Essendo il cannocchiale rivolto e fissato in una posizione particolare, sia PCS la direzione del circolo di declinazione condotto per il suo centro. Egli è palese che se due stelle fisse verranno ad attraversare l'armilla, in virtù del loro moto diurno,

percorreranno due corde, come AB, FG paralelle fra loro ed all'equatore, e per conseguenza perpendicolari a PS. Se osserveremo con un orologio siderale i tempi degl'ingressi e sortite di queste stelle in A. B, in F, G, la loro semisomma darà il tempo dell'appulso al circolo di declinazione, e la loro differenza ridotta in secondi di grado porgerà gli archi di equatore compresi fra i circoli di declinazione condotti per A e B, per F e G, i quali moltiplicati per il coseno della rispettiva declinazione, daranno la lunghezza delle corde AB, FG in secondi di grado. Ciò premesso, è facile vedere che la differenza dei tempi dell'appulso delle due stelle allo stesso circolo di declinazione PS dà la differenza delle loro AR; e se inoltre conoscasi il raggio del circolo, la distanza delle due corde AB, FG paralelle di determinata lunghezza, sarà pure determinata e facile a calcolarsi, e darà la differenza delle declinazioni dei due astri.

Sia in fatti r il raggio AC del circolo espresso in secondi di grado; il tempo sidereo che un astro impiega a percorrere la corda AB sia $= \tau$: la declinazione del medesimo $= \delta$. Avremo $AB = 15\,\tau \cos\delta$, che porremo per brevità $= 2a$; sarà $Ag = a$, e perciò il triangolo rettangolo AgC darà $Cg = \sqrt{(r^2 - a^2)}$. Del pari se τ', a', δ' rappresentano le stesse quantità per l'astro che percorre FG, avremo $Cg' = \sqrt{(r^2 - a'^2)}$, quindi la differenza delle declinazioni sarà $= \sqrt{(r^2 - a^2)} \pm \sqrt{(r^2 - a'^2)}$, valendo il segno $+$ se le due corde sono di sotto e di sopra del centro; il segno $-$ se restano da una stessa parte rapporto al centro.

La quantità $\sqrt{(r^2 - a^2)}$ si calcolerà comodamente colle tavole logaritmiche ponendola sotto la forma $\sqrt{[(r+a)(r-a)]}$, ovvero facendo $\text{sen}\,\varphi = \frac{a}{r}$, dopo di che si avrà $\sqrt{(r^2 - a^2)} = r\cos\varphi$.

264. Si è supposto che i due astri non avessero alcun movimento in AR ed in declinazione. Accade sovente che uno di essi abbia un moto determinato in AR ed in declinazione, ed in allora non percorre più una linea paralella all'equatore con una celerità uguale a quella del moto diurno. Così se supponiamo che l'astro più boreale sia animato da una celerità tale, che in un secondo di tempo siderale la sua AR aumenti di $\Delta\alpha$, e la sua declinazione di $\Delta\delta$ ($\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ essendo tali che se ne possano trascurare le potenze superiori alla prima, come sempre accade), in luogo di percorrere la retta AB percorrerà la retta Ab, e la semisomma dei tempi osservati nell'ingresso ed egresso dal circolo non corrisponderà più al passaggio in f per il circolo di declinazione, ma al punto i, piede della perpendicolare Ci, che divide Ab per metà; e la differenza delle declinazioni coll'altro astro sarà $= Cg' + Cf$. Si troverà pertanto il passaggio dell'astro mobile

per il punto f, aggiungendo alla semisomma dei tempi osservati in A, b il tempo opportuno a percorrere if.

Per trovare if io osservo che in virtù del moto diurno il nostro astro in un secondo di tempo siderale percorre nel suo paralello nel senso dell'equatore un arco $= (15'' - \Delta\alpha)\cos\delta$ § 207. Dobbiamo adunque supporlo animato dalle due celerità $(15'' - \Delta\alpha)\cos\delta$, $\Delta\delta$, che per essere ad angolo retto si compongono in una sola espressa da $\sqrt{[(15'' - \Delta\alpha)^2 \cos\delta + (\Delta\delta)^2]}$, la quale trascurando le potenze seconde si riduce a $(15'' - \Delta\alpha)\cos\delta$, ed in virtù di essa percorre Ab. Se chiamiamo i l'angolo BAb, od il suo uguale iCf, sarà $\tan i = \frac{\Delta\delta}{(15'' - \Delta\alpha)\cos\delta} = \frac{\Delta\delta}{15\cos\delta}$, e però $\operatorname{sen} i = \frac{\Delta\delta}{15\cos\delta}$, $\cos i = 1$.
Se ora τ rappresenta il tempo impiegato a percorrere Ab, sarà $Ab = (15 - \Delta\alpha)\tau\cos\delta$, e però
$Ci = \sqrt{[r^2 - \frac{1}{4}(Ab)^2]} = \sqrt{[r^2 - \frac{1}{4}\tau^2\cos^2\delta(15 - \Delta\alpha)^2]}$, la quale ponendo per brevità $d' = \sqrt{[r^2 - (\frac{1}{2}15\tau\cos\delta)^2]}$, svolta darà $Ci = d' + \frac{15\tau^2\cos^2\delta}{4d'}\Delta\alpha$. Trovato Ci, sarà $if = Ci\tan i$; ed il tempo impiegato a percorrerlo $= \frac{Ci\tan i}{(15'' - \Delta\alpha)\cos\delta}$, che trascurando al solito le quantità di secondo ordine si riduce a $+\frac{d'\Delta\delta}{225\cos^2\delta}$, e questa sarà la quantità da aggiungere al tempo osservato del passaggio per il punto i, per avere il passaggio per il circolo di declinazione in f.

Quanto alla distanza Cf è questa $= Ci$, trascurando le quantità di secondo ordine, poichè $Cf = \frac{Ci}{\cos i}$, e $\cos i = 1$. Quindi se t', t'' indicheranno i tempi osservati in A, b, e se si ponga d' la distanza della corda Ab del centro calcolata senza avere alcun riguardo al moto dell'astro, sarà il tempo del passaggio per $f = \frac{1}{2}(t' + t'') + \frac{d'\Delta\delta}{225\cos^2\delta}$, e la distanza $Cf = d' + \frac{15(t'' - t')^2\cos^2\delta}{4d'}\Delta\alpha$.

265. Vediamo ora quali correzioni convenga applicare alle osservazioni fatte sui micrometri circolari per ispogliarle della rifrazione astronomica, e consideriamo un astro che abbassandosi verso l'orizzonte percorra AB.

Egli è in primo luogo evidente, che se la rifrazione rimanesse costante per tutto il tempo impiegato a percorrere AB, egli descriverebbe una corda paralella all'equatore, e quindi converrebbe applicare

alla sua AR e declinazione dedotta da questa osservazione quelle stesse correzioni che abbiamo indicate per il micrometro filare al § 262 attribuendogli una rifrazione uguale a quella che soffre in A. Pertanto seguendo lo stesso ragionamento, e ritenendo le denominazioni precedenti, l'istante del passaggio libero della rifrazione per il circolo di declinazione condotto per il vero centro sarebbe espresso da

$T = \frac{1}{2}(t' + t'') - \frac{r \operatorname{sen} C}{15 \cos \delta}$, e la sua vera declinazione sarebbe $=$ declin. vera di centro $+ d' - r \cos C$.

Ma abbassandosi l'astro nel percorrere la linea AB, la rifrazione continuamente aumenta, per lo che invece della corda AB paralella all'equatore, sembra percorrere la retta Ab alla prima inclinata di BAb, e se indichiamo per g l'incremento delle rifrazioni da A in B, la declinazione dell'astro sembrerà da A in B aumentata di una quantità $= g \cos C$, e l'AR pure aumentata di $\frac{g \operatorname{sen} C}{\cos \delta}$. Quindi, chiamando τ il tempo $t'' - t'$ espresso in secondi siderali, l'incremento apparente della declinazione in un secondo sarà $= \frac{g \cos C}{\tau}$; e l'incremento corrispondente dell'AR sarà $= \frac{g \operatorname{sen} C}{\tau \cos \delta}$. Per ispogliare adunque le AR e declinazioni di questo apparente incremento, attribuiremo loro una velocità $\Delta \alpha$ in $AR = \frac{-g \operatorname{sen} C}{\tau \cos \delta}$, ed in declinazione $\Delta \delta = \frac{-g \cos C}{\tau}$. Quindi ragionando come nel § precedente troveremo le correzioni da applicare al passaggio per il circolo orario, e alla distanza dal centro per ispogliarle interamente dell'effetto della rifrazione. Otterremo così

$$\text{pass. al vero circolo orario} = \tfrac{1}{2}(t' + t'') - \frac{r \operatorname{sen} C}{15 \cos \delta} - \frac{g\, d' \cos C}{225\, \tau \cos^2 \delta},$$

$$\text{differ. di declin. col centro} = d' - r \cos C - \frac{15\, \tau \cos \delta\, g \operatorname{sen} C}{4\, d'},$$

ove la quantità d' rappresenta la distanza della corda dal centro calcolata senza avere alcun riguardo alla rifrazione.

La quantità r si prenderà dalle tavole ordinarie delle rifrazioni per l'altezza dell'astro sopra l'orizzonte corrispondente al tempo siderale t. Quanto alla quantità g esprimente la differenza fra le rifrazioni relative ai punti A, B si otterrà calcolando il cambiamento in altezza da A in B dietro la formula $\Delta h = -15\, \tau \cos \delta \operatorname{sen} C$, che agevolmente deducesi dalle formule differenziali dei triangoli sferici date nella Trigono-

metria. Ecco pertanto le formule da calcolarsi per liberare una tale osservazione dalla rifrazione.

Si calcoleranno in primo luogo h, C, Δh colle seguenti equazioni, nelle quali H esprime l'angolo orario del centro del micrometro

(1) $\cos h \operatorname{sen} C = \cos L \operatorname{sen} H$,

(2) $\cos h \cos C = \operatorname{sen} L \cos \delta - \cos L \operatorname{sen} \delta \cos H$,

(3) $\Delta h = -15\, \tau \cos \delta \operatorname{sen} C$.

Si prenderà la rifrazione r corrispondente all'altezza $h - \frac{1}{2}\Delta h$, e la sua variazione g per una diminuzione Δh nell'altezza. Quindi chiamando T' il tempo del passaggio al circolo di declinazione ottenuto con le correzioni del § precedente, se siano necessarie; e d' la distanza della corda Ab dal centro; T, d le stesse quantità corrette dalla rifrazione, avremo

$$(4)\quad T = T' - \frac{r \operatorname{sen} C}{15 \cos \delta} - \frac{g\, d' \cos C}{225\, \tau \cos^2 \delta},$$

$$(5)\quad d = d' - r \cos C - \frac{15\, \tau\, g \operatorname{sen} C \cos \delta}{4\, d'}.$$

Applicando poi le stesse correzioni eziandio all'astro che percorre la corda FG, dal confronto delle osservazioni così spogliate della rifrazione e dei movimenti particolari degli astri, troveremo le loro vere differenze di AR e di declinazione.

266. Suppongono le formule dei §§ precedenti che gli astri nell'attraversare il micrometro circolare descrivano linee rette paralelle all'equatore, mentre in fatto percorrono archi di paralelli. Una tale supposizione è quasi sempre permessa in grazia della piccolezza del raggio del micrometro; ma se gli astri osservati fossero molto vicini ai poli dell'equatore, il raggio del micrometro abbraccierebbe una porzione considerabile del paralello condotto in quelle regioni, e le formule del moto rettilineo abbisognerebbero di una correzione*. Egli è in primo luogo manifesto, che la semisomma dei tempi osservati nell'ingresso e sortita somministrerà sempre il passaggio dell'astro per il circolo di declinazione condotto per il centro, e quindi le AR dedotte con questo mezzo non abbisogneranno di alcuna correzione. Quanto alle differenze di declinazione consideriamo il triangolo sferico formato al punto d'ingresso dell'astro, al polo dell'equatore, ed al centro del micrometro. Chiamando δ la declinazione dell'astro, D quella del centro, r il raggio del micrometro, τ il tempo siderale impiegato per descrivere AB, l'angolo al polo sarà $= \frac{15}{2}\tau$, e però esso triangolo darà l'equazione $\cos r = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} D + \cos \delta \cos D \cos \frac{15}{2}\tau$, la quale per l'artificio tante volte posto in uso riducesi a

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} r = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(\delta - D) + \cos \delta \cos D \operatorname{sen}^2 \tfrac{15}{4}\tau.$$

Sostituendo gli archi ai seni di r, $\delta - D$, $\frac{15}{4}\tau$, che sempre riman-

gono piccolissimi, o ponendo al solito $\frac{15}{2}\tau\cos\delta = a$, la precedente equazione porge

$$(\delta - D)^2 = r^2 - \frac{a^2 \cos D}{\cos\delta} = r^2 - a^2 - a^2 \frac{\cos D - \cos\delta}{\cos\delta} = r^2 - a^2 - (\delta - D) a^2 \tang\delta,$$

trascurando le potenze di ordini superiori; estraendo ora la radice quadrata, e ponendo nel termine piccolissimo in luogo di $\delta - D$ il suo valore prossimo $\surd(r^2 - a^2)$, otterremo

$$\delta - D = \surd(r^2 - a^2) - \frac{a^2 \tang\delta}{2R''},$$ ove $\surd(r^2 - a^2)$ è la distanza della corda supposta rettilinea dal centro del micrometro. Posta questa $= d$, avremo $\delta - D = d - \frac{a^2 \tang\delta}{2R''}$.

Del pari per un altro astro indicando per a', δ', d' le quantità corrispondenti ad a, δ, d, troveremo $\delta' - D = d' - \frac{a'^2 \tang\delta'}{2R''}$. Quindi la differenza delle declinazioni dei due astri sarà

$$\delta' - \delta = d' - d + \frac{a^2 \tang\delta - a'^2 \tang\delta'}{2R''};$$ e se in quest' ultimo termine, che rimane piccolissimo, sostituiamo a δ e δ' il medio aritmetico $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$, otterremo senza errore sensibile

$$\delta' - \delta = d' - d + \frac{\tang\frac{1}{2}(\delta' + \delta)}{2R''}(a' + a)(a - a'),$$ ove R'' è il solito numero di secondi contenuto nel raggio, il cui logaritmo è $= 5,3144251$.

267. A compimento di quanto abbiamo detto intorno al micrometro circolare, aggiungeremo la maniera di determinare il raggio r, che come elemento importantissimo entra in tutte le formule precedenti. Il metodo più facile e più spedito per questa ricerca sarebbe quello di determinare il tempo che una stella equatoriale, passando pel centro, impiega a percorrerne il diametro, poichè la sua metà ridotta in secondi di grado darebbe il valore di r. Ma essendo molto difficile assicurarsi che essa passi esattamente per il centro, così è più sicuro determinarlo mediante due stelle, delle quali si conosca esattamente la differenza di declinazione. Sieno in fatti due stelle (*Fig.* 55) che percorrano le corde AB, FG, e sia la declinazione di $AB = \delta$, di $FG = \delta'$. Il tempo impiegato a percorrere $AB = \tau$, ed $FG = \tau'$. Sarà $AB = 15\tau\cos\delta = 2a$, $FG = 15\tau'\cos\delta' = 2a'$. Indicando ora con z, z' gli angoli ACg, FCg' avremo le tre equazioni $r \operatorname{sen} z = a$, $r \operatorname{sen} z' = a'$, $r(\cos z' + \cos z) = \delta' - \delta$, le quali danno $\frac{\operatorname{sen} z' + \operatorname{sen} z}{\cos z' + \cos z} = \frac{a' + a}{\delta' - \delta}$, $\frac{\operatorname{sen} z' - \operatorname{sen} z}{\cos z' + \cos z} = \frac{a' - a}{\delta' - \delta}$, che in virtù delle

equazioni della Trigonometria (I.) si cangiano in

$$(1)\ \tang \tfrac{1}{2}(z' + z) = \frac{a' + a}{\delta' - \delta}; \qquad (2)\ \tang \tfrac{1}{2}(z' - z) = \frac{a' - a}{\delta' - \delta}.$$

Avendo con queste equazioni determinato gli angoli z, z', si avrà

$$r = \frac{a}{\operatorname{sen} z} = \frac{a'}{\operatorname{sen} z'} = \frac{\delta' - \delta}{2 \cos \tfrac{1}{2}(z + z') \cos \tfrac{1}{2}(z' - z)}.$$

Il raggio del micrometro circolare si potrà eziandio molto accuratamente determinare se abbiasi un teodolite od un circolo ripetitore, misurandone il diametro dopo di avere tolti gli oculari, come si è praticato per determinare le distanze equatoriali dei fili nello stromento dei passaggi al § 34.

268. *Micrometro angolare*. Il micrometro circolare è sommamente comodo nelle osservazioni astronomiche, perchè applicato ad un cannocchiale qualunque pel suo uso, non altro richiedesi se non che sia questo solidamente montato sopra un piede qualunque affinchè durante le osservazioni mantenga una posizione invariabile. Un tale micrometro è salito in grande riputazione in grazia dell' uso frequente fattone dal celebre Olbers, il che ha impegnato un altro valentissimo matematico ed astronomo ad esporne la teoria in un breve commentario inscrito nel volume XXIV del più volte citato Giornale *Monatliche Correspondenz von Zach*, ove troverassi pure un ingegnoso artificio suggerito da Olbers per ottenere con sicurezza la differenza di declinazione di due astri nel caso che uno di essi passasse in gran vicinanza del centro, poichè allora un piccolo errore commesso nel tempo ha una grande influenza nel risultamento.

Tutto che semplice sia l' uso del micrometro circolare, trovo più comodo (quando si abbia un cannocchiale montato paralatticamente) un' altra foggia di micrometro, che chiamerò *angolare*, di cui ho fatto uso frequente nelle osservazioni delle comete, quando per anche non era in possesso quest' Osservatorio dell' equatoriale di Utzschneider descritto al capitolo II.

Rappresenti (*Fig.* 59) $RPSP'$ il campo visibile del cannocchiale; MM', PP', NN' siano tre fili d' argento, o tre sottili laminette metalliche tese nel foco, equidistanti fra loro, e visibili anche senza estranea illuminazione per facilitare l' osservazione degli astri i più languidi, come spesso sono le comete; RS una simile laminetta alle precedenti perpendicolare, la quale rendesi parallela all' equatore facendosi che una stella fissa la segna esattamente per tutto il tempo da essa impiegato ad attraversare il campo; MN' un' altra uguale lamina metallica inclinata alle prime di un angolo $= i$, che fassi dai 30° ai 45°, e che devesi con le osservazioni accuratamente determinare, come dirassi in appresso. Due astri vengano ad attraversare il campo l' uno

percorrendo il paralello $a\,b\,c\,d$, l'altro $a'\,b'\,c'\,d'$, e si osservino accuratamente i tempi t, t', t'', t'''; $\tau, \tau', \tau'', \tau'''$ nei quali sortono dalle lamine in a, b, c, d; a', b', c', d'. Sarà primieramente il passaggio alla lamina di declinazione $P\,P'$ per il primo $= \frac{1}{3}(t + t' + t''')$; per il secondo $= \frac{1}{3}(\tau + \tau' + \tau''')$; e la loro differenza darà la differenza delle *AR* degli astri. In secondo luogo indicando per δ, δ' le declinazioni prossime dei due astri, sarà $a\,c = 15\,(t'' - t)\cos\delta$; $a'c' = 15(\tau'' - \tau)\cos\delta'$, $c\,d = 15(t''' - t'')\cos\delta$; $c'd' = 15(\tau''' - \tau'')\cos\delta'$, dove basterà conoscere la declinazione dentro qualche minuto, e si potrà il più delle volte fare $\delta = \delta'$ (uguale alla declinazione del centro del cannocchiale). Avendo dietro le differenze dei tempi calcolato le linee $a\,b$, $c\,d$, $a'\,b'$, $c'\,d'$ si chiamino per ordine a, α, b, β; sarà $a\,a' = \delta - \delta' = (a - b)\,\text{tang}\,i$; e del pari $d\,d' = \delta - \delta' = (\beta - \alpha)\,\text{tang}\,i$. Conoscendo pertanto l'angolo i, si avrà dietro questo modo di osservare la differenza di declinazione; viceversa si otterrà l'angolo i dietro l'osservazione di due stelle di nota declinazione mediante le equazioni $\text{tang}\,i = \dfrac{\delta - \delta'}{a - b}$, ovvero $\text{tang}\,i = \dfrac{\delta - \delta'}{\beta - \alpha}$.

Qui pure si dovranno correggere i risultamenti ottenuti dalla variazione delle rifrazioni; le formule per questo oggetto facilmente si deducono dietro discussioni analoghe a quelle che abbiamo riferite per le due precedenti specie di micrometri, e perciò non ce ne occuperemo, rimandando per la teoria generale di queste correzioni per qualunque specie di micrometri a due interessanti articoli del signor *Bessel* nel volume XVII del *Mon. Corresp.* di Zach, e nel volume III del Giornale del signor Schumacher pubblicato in Altona sotto il titolo di *Astronomische Nachrichten* pag. 377.

269. *Scolio.* Quando coi metodi precedenti siasi osservato la posizione di un pianeta rapporto all'equatore, questa è riferita alla posizione apparente dell'equinozio, o, come dicono gli Astronomi, all'equinozio vero, e di più è affetta dall'aberrazione della luce. Riservandoci nel secondo volume a trattare dei movimenti dell'equinozio e dell'aberrazione della luce, qui ci limiteremo ad indicare i precetti per ispogliare le osservazioni da queste piccole quantità.

In primo luogo dalle *AR* e declinazioni osservate, e ridotte come abbiamo prescritto, si dedurranno le longitudini e latitudini apparenti del pianeta facendo uso della obbliquità apparente dell'ecclittica per quell'istante che prenderassi o dalle tavole del Sole, o dalle Effemeridi annue degli Astronomi. Ritenendo inalterata la latitudine, applicheremo alla longitudine la nutazione dei punti equinoziali presa con segno contrario a quello delle tavole, o delle Effemeridi, e si avrà così la posizione del pianeta rapporto all'ecclittica riferita alla media posizione dell'equinozio.

In secondo luogo per ispogliare le posizioni osservate dall'aberrazione della luce, sia il moto diurno geocentrico del pianeta espresso in minuti e parti di minuto $= n$; la sua distanza dal centro della terra sia $= r'$; P indichi la quantità determinante la posizione libera dall'aberrazione; P' la stessa quantità affetta dall'aberrazione. Avremo fra P e P' la seguente relazione $P = P' + 0,3425\, n\, r'$, nella quale se P, P' indicano AR, declinazioni, longitudini o latitudini, dovrà n essere il moto diurno geocentrico in AR, declinazione, longitudine o latitudine, che si dedurrà dalle osservazioni giornaliere o dall'Effemeridi, od anche dalle formule esposte al § 252. Il termine $0,3425\, n\, r'$ rappresenta l'effetto dell'aberrazione espresso in secondi di grado, se (come abbiamo supposto) sia n dato in minuti.

CAPITOLO XIX.

Di alcuni accidenti particolari relativi alla costituzione fisica dei pianeti. Quadro del sistema planetario. Catalogo delle Comete.

270. I pianeti tutti veduti con buoni cannocchiali presentano un sensibile diametro, il quale sebbene sia di pochi secondi, pure varia insieme con la loro distanza dal centro della terra. Noi riferiremo nel quadro generale in fine di questo capitolo il diametro di ogni pianeta, come sarebbe veduto in una distanza dalla terra uguale alla distanza media della terra dal Sole, che assumeremo per unità delle distanze celesti. Qualora siasi col mezzo di un buon micrometro determinato il diametro apparente di un pianeta, per ricondurlo a quello che osserverebbesi nell'indicata distanza, convien calcolare per l'istante dell'osservazione la distanza del pianeta dalla terra, che porremo $= r'$. Se 2Δ rappresenta il diametro misurato, 2δ quello ridotto alla distanza media, e se indichiamo per $2g$ il diametro lineare del pianeta, avremo dietro i noti principj di ottica $2\Delta = \frac{2g}{r'}$, e $2\delta = 2g$; quindi $\Delta = \frac{\delta}{r'}$, e però $\delta = r'\Delta$, dalla quale equazione otterremo il semidiametro ridotto alla distanza media col mezzo del semidiametro misurato, e viceversa dato δ avremo il semidiametro Δ, che avrà luogo in una distanza r'. Se dividiamo il semidiametro di un pianeta per il semidiametro terrestre veduto alla stessa distanza, o ciò che è lo stesso per la paralasse orizzontale del Sole, avremo il raggio del pianeta in parti del raggio della terra, ed il cubo di questo rapporto darà il vo-

lume del pianeta supposto quello della terra = 1. In tal guisa si è formata la colonna dei volumi dei pianeti nel quadro generale.

271. Mercurio, che è il pianeta al Sole più vicino, essendo quasi sempre immerso nei raggi solari, difficilmente può vedersi ad occhio nudo, ed anche coi cannocchiali, apparisce mal contornato, e si presenta come una piccola face tremula, qualora non siano essi di un'estrema precisione. Il solo Schroeter ha potuto vederlo ben contornato, e lo ha giudicato circondato da un'atmosfera molto densa; vi ha eziandio scoperto delle ombre molto estese, le quali sembrano annunziare delle alte montagne alla sua superficie, e dall'andamento di queste ombre, dalla posizione dei corni della fase luminosa ha giudicato che si ravvolga intorno a se stesso da occidente verso oriente nello spazio di $24^h\ 5'\ 30''$. Il piano del suo equatore è inclinato al piano della sua orbita di circa 20°; donde risultano vicissitudini delle stagioni analoghe a quelle della terra.

272. Venere è il secondo pianeta situato fra Mercurio e la terra in una distanza dal Sole di circa 0,7. Domenico Cassini, mentre era ancora in Italia, quindi Bianchini con forti cannocchiali vi osservarono delle macchie. Sembrò a Cassini che si ravvolgesse intorno al suo asse in 23 ore; ma Bianchini credè invece potere stabilire la sua rivoluzione in $24^g\ 8^h$. Tanta disparità è stata decisa in questi ultimi tempi dal signor Schroeter, il quale coi suoi perfettissimi telescopj vi ha scoperto nuove macchie, delle montagne, un'atmosfera in densità poco dalla nostra diversa, ed ha stabilito la durata della sua rotazione in $23^h\ 21'\ 19''$. La posizione del suo equatore non è per anco ben conosciuta; dietro alcune non del tutto certe osservazioni è stato congetturato che questo piano sia inclinato a quello dell'orbita per circa 72°; inclinazione grandissima, dalla quale devono risultare grandi differenze fra gli avvicendamenti delle stagioni, se alle nostre vogliansi confrontare. Venere splende talvolta a tal segno, che può vedersi anche di giorno. Si crederebbe che la sua massima luce dovesse aver luogo verso le sue digressioni; essa invece ha luogo avanti e dopo le congiunzioni inferiori in una distanza dalla terra = 0,4304, ed in una elongazione di 39° 43', come può vedersi nel vol. II dell'Astronomia del signor Piazzi.

273. Marte presenta pure con buoni telescopj diverse macchie, delle quali alcune sembrano fissamente aderenti alla sua superficie, altre variabili. I primi a riconoscerle furono Fontana nel 1636, e Bartoli nel 1644; ma al signor Cassini si deve il merito di averle attentamente seguite, e di averne fino dal 1666 dedotto che Marte ravvolgesi in $24^h\ 40'$. Suo figlio, Maraldi, ed altri se ne sono successivamente occupati, e per ultimo Herschel ha dedotto dalle sue proprie osservazioni la posizione dell'equatore di Marte, e la durata della sua

rotazione. Egli stabilisce la durata della rivoluzione di Marte in $24^h\ 39'\ 21''$, l'inclinazione del suo equatore al piano della sua orbita di $28°\ 42'$, e pone il nodo a $2^s\ 10^s\ 28'$, donde risulta certa somiglianza nelle vicissitudini delle stagioni, che devono aver luogo alla superficie di Marte con quelle della terra. Herschel ha eziandio osservato uno schiacciamento considerabile in Marte, ed ha trovato il diametro equatoriale maggiore dell'asse dei poli di $\frac{1}{16}$. Per ultimo le macchie variabili osservate in Marte essendo situate verso i poli del suo equatore, vengono dal signor Herschel riputate simili agli ammassi di ghiacci e di nevi che si trovano ai poli della terra, i quali si sciolgono in virtù del calore estivo.

274. Giove e Saturno veduti con buoni telescopj presentano pure delle macchie, delle quali alcune sono variabili, altre sembrano come aderenti alla loro superficie. Domenico Cassini fu il primo a riconoscerle, e giunse col loro mezzo a scuoprire la rotazione di Giove, che giudicò di $9^h\ 55'\ 51''$, il quale risultamento è stato eziandio dagli Astronomi posteriori verificato, e specialmente dal celebre Herschel, il quale la giudica di $9^h\ 54'$ intorno ad un asse all'orbita del pianeta pressochè perpendicolare. Quanto alla rotazione di Saturno è stata per la prima volta determinata dal signor Herschel nell'anno 1793, il quale con moltiplici osservazioni la reputa di circa $10^h\ 16'$ (*). La sorprendente celerità di rotazione di questi due pianeti deve produrre verso il loro equatore una gran forza centrifuga, e quindi le molecole all'equatore gravitando meno verso il centro che ai poli, dovranno dal centro più discostarsi. Il diametro del loro equatore dovrà notabilmente differire dall'asse di rotazione, la qual cosa realmente si osserva essendosi trovato dietro esattissime misure dal signor ab. Rochon, che in Giove il rapporto degli assi è di 15:16, e secondo altri di 13:14, mentre per Saturno risulta all'incirca di 10:11. Oltre le macchie, dalle quali si è dedotta la rotazione intorno ad un asse da occidente verso oriente, si sono osservate sulla superficie di Giove e di Saturno delle fascie paralelle al loro equatore alquanto variabili sia per il grado della loro luce, come anche pel loro numero e posizione. Sulla superficie di Giove d'ordinario se ne distinguono tre anche con i cannocchiali di mediocre ingrandimento, ed Herschel con i suoi giganteschi telescopj è giunto a noverarne presso a 40. Le fascie di Saturno sono più difficili a vedersi, e per la prima volta fu-

(*) Il signor Baily nella sua pregevolissima opera (*Astronomical Tables and Formulae etc.* tho wich are prefixed the elements of the Solar System. London 1827) porge i seguenti valori numerici: Tempo della rotazione di Giove $9^h\ 55'\ 49'',7$; inclinazione del suo asse a quello dell'ecclittica $= 3°\ 5'\ 30''$. Tempo della rivoluzione di Saturno $= 10^h\ 29'\ 16'',8$; inclinazione del suo asse a quello dell'ecclittica $= 31°\ 19'$.

rono da Cassini rimarcate, indi dai signori Herschel e Schroeter osservate e disegnate. La loro variabilità, e la loro costante direzione nel senso dell'equatore fa sospettare che esista intorno a questi due pianeti un'atmosfera, sulla quale si adunino i vapori in forma di nubi, e da venti regolari simili a quelli della nostra terra fra i tropici vengano da occidente in oriente trasportate.

275. Urano è l'ultimo pianeta del nostro sistema finora conosciuto. Fu scoperto dal signor Herschel la notte dei 13 Marzo 1781, e da esso annunziato al pubblico qual nuova cometa. Non essendo stato possibile rappresentare plausibilmente le osservazioni di questo nuovo astro in un'orbita parabolica (ipotesi che ordinariamente si assume a rappresentare il moto delle comete, come vedremo a suo luogo), il signor Saron dubitò per il primo che dovesse venire riposto fra il numero dei pianeti, ed in fatti avendo cercato un'orbita circolare, che rappresentasse tre osservazioni, trovò che mirabilmente soddisfaceva alle altre.

In seguito i signori Slop astronomo di Pisa, Oriani e de Lambre ne formarono delle tavole, e questi ultimi avendo dietro la teoria di la Place calcolato le perturbazioni cui va esso sottoposto per l'attrazione degli altri pianeti, pervennero a rappresentarne i movimenti con quella medesima precisione, con cui le tavole rappresentano i moti degli altri pianeti. A tanta esattezza molto contribuì la fortunata scoperta del signor Bode di Berlino, il quale riconobbe che una stella osservata dal celebre Mayer il 25 Settembre 1756, e non più veduta al posto indicato benissimo rappresentava la posizione di Urano in quella sera, donde si è potuto dedurre con gran precisione la durata della sua rivoluzione intorno al Sole di 83 anni 52^g 4^h, e quindi per la terza legge di Keplero si è ottenuta la sua distanza media dal Sole. Essendo egli da noi sempre molto distante poco o nulla si conosce della sua fisica costituzione, e quantunque non si dubiti della sua rotazione, non si è ancora pervenuto a determinarla dietro le osservazioni.

Dei nuovi pianeti Cerere, Pallade, Giunone e Vesta.

276. Keplero il primo, indi Lambert e Bode cominciarono a sospettare che fra Marte e Giove esister dovesse un nuovo pianeta, a ciò indotti da una certa legge, che discuoprirono nelle distanze dei pianeti dal Sole, alla quale soddisfa plausibilmente eziandio Urano scoperto nel 1781. Posta la distanza della terra dal Sole = 10, le medie distanze dei pianeti si possono esprimere presso a poco nel modo seguente:

1.° per Mercurio	$4 = 4 + 0.\ 1^0$	circa.
2.° per Venere	$7 = 4 + 3.\ 2^0$	
3.° per la Terra	$10 = 4 + 3.\ 2^1$	
4.° per Marte	$15 = 4 + 3.\ 2^2$	
5.° per Giove	$52 = 4 + 3.\ 2^4$	
6.° per Saturno	$95 = 4 + 3.\ 2^5$	
7.° per Urano	$192 = 4 + 3.\ 2^6$	

Vedesi di qui che la legge delle distanze fra Marte e Giove soffre un'interruzione, e quindi quelli che in tutte le operazioni della natura sogliono ammirare l'armonia e l'uniformità non esitarono a credere, che esistere dovesse un altro pianeta, la cui distanza media dal Sole fosse $= 4 + 3.\ 2^3 = 28$, resosi a noi per la sua piccolezza invisibile. Gli Astronomi dell'Allemagna si divisero il cielo, formando per la sua ricerca una società, di cui era presidente il signor Schroeter, e segretario il signor barone di Zach. Mentre erano tutti intenti a questa ricerca ne toccò in sorte la scoperta al signor Piazzi in Palermo, il quale occupato nella formazione del suo celebre catalogo andava passando in rivista le più piccole stelle. La sera pertanto del primo Gennajo 1801 alle ore 8 rimarcò una piccola stella non segnata in altri cataloghi, ne determinò la posizione, e non tardò ad accorgersi nelle successive notti che era dotata di moto proprio. È interessantissima la storia relativa alla scoperta di questo pianeta, e dei primi passi fatti per determinarne la sua orbita. Si può vedere in tre Memorie dello stesso Piazzi, nelle Effemeridi di Milano, e soprattutto nel più volte citato Giornale del signor Zach, ove trovansi tutte le osservazioni, le ipotesi, i calcoli relativi a questo ed agli altri suoi germani pianeti scoperti negli anni susseguenti, cioè a Pallade scoperto dal signor Olbers il 28 Marzo 1802; a Giunone ritrovato dal signor Harding il 2 Settembre 1804, ed a Vesta veduto per la prima volta da Olbers il 29 Marzo 1807. Quasi tutti gli Astronomi viventi si sono indefessamente applicati nell'osservare questi nuovi astri, e correggere gli elementi delle loro orbite. Al signor Gauss però si deve il vanto di averne di tutti sulle prime osservazioni determinati gli elementi ellittici, ed a questo celebre calcolatore siamo debitori di nuovi elegantissimi e speditissimi metodi per determinare dietro tre osservazioni fra loro non molto distanti l'orbita di un nuovo pianeta.

277. Tutti questi nuovi pianeti sono molto piccoli, e non possono essere osservati se non con i migliori cannocchiali; ciò non ostante Cerere e Vesta sono abbastanza splendenti, e facilmente osservare si possono agli stromenti meridiani; Pallade e Giunone sono molto più deboli, e molto più difficili ad osservarsi. Quanto ai loro diametri, alla distanza media della terra dal Sole, giusta le misure di Herschel e di Schroeter risultano come segue: diametro di Cerere $= 4'',48$; di

Pallade = 4″,30; di Giunone = 3″,06; Vesta non si è potuto bene apprezzare. Una circostanza assai rimarchevole si è che tutti questi nuovi pianeti cadono fra Marte e Giove conservando presso a poco una stessa distanza media dal Sole, ed i piani delle loro orbite s'incontrano all'incirca negli stessi punti del cielo stellato, cioè nella costellazione della Vergine, e nella opposta della Balena (*). Da tutte queste circostanze il celebre Olbers è stato condotto alla felicissima ipotesi che originariamente esistere dovesse fra Marte e Giove un solo pianeta di massa e volume agli altri comparabile, e che o per interna forza espansiva, o per il possente urto di qualche cometa sia stato ridotto in piccole parti, le quali animate dalla forza centripeta verso il Sole, e dalla novella forza di projezione abbiano preso a descrivere nuove orbite intorno al Sole comprese in piani tali che evidentemente tagliar si doveano nei contorni della separazione. Non vi fu per certo ipotesi coronata da più felici successi; poichè assiduamente osservandosi le stelle della costellazione della Vergine e della Balena (per ove questi frammenti planetarj passare dovrebbero nello spazio di quattro o cinque anni) si è pervenuto allo scoprimento di Giunone e di Vesta. Forse altri ne esistono, che a noi svelerà la serie dei tempi, e l'assidua osservazione, c forse alcuni altri frammenti si sono cangiati

(*) Sieno Ω, Ω' le longitudini dei nodi ascendenti di due orbite planetarie, le inclinazioni delle quali all'ecclittica sieno i, i'. Sia p la longitudine del loro *punto* d'incontro, q la sua latitudine, n l'argomento di latitudine di questo *punto nella* prima orbita, n' nella seconda. Avremo per determinare p, q, n, n' le seguenti equazioni

$$(1)\quad \text{tang}\, q = \text{tang}\, i \,\text{sen}\,(p - \Omega) = \text{tang}\, i' \,\text{sen}\,(p - \Omega'),$$

dalla quale coll'artificio più volte praticato deducesi

$$(2)\quad \text{tang}\left[p - \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega')\right] = \frac{\text{sen}\,(i' + i)}{\text{sen}\,(i' - i)}\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(\Omega' - \Omega).$$

Trovati p, q, si avrà $\text{tang}\, n = \dfrac{\text{tang}\,(p - \Omega)}{\cos i}$, $\text{tang}\, n' = \dfrac{\text{tang}\,(p - \Omega')}{\cos i'}$. Qualora conoscansi n, n' si otterranno facilmente le anomalie corrispondenti alla linea dei nodi, e quindi i raggi vettori, la differenza dei quali porgerà la distanza scambievole dei pianeti nella linea stessa. Applicando questi precetti ai nuovi pianeti trovasi (assumendo per unità delle distanze la distanza media dal Sole)

pel 1810	p	q	distanze scambievoli	
			nel 1° nodo	nel 2° nodo
Cerere — Pallade	187° 39′	+ 10° 11′	0, 199	0, 078
Cerere — Giunone	210 0	8 17	0, 609	0, 835
Cerere — Vesta	227 26	5 54	0, 549	0, 166
Pallade — Giunone	173 17	0 30	0, 597	0, 851
Pallade — Vesta	182 51	7 1	0, 080	0, 147
Giunone — Vesta	203 12	7 2	0, 995	0, 463

in comete, prendendo a descrivere delle orbite paraboliche, come ha dimostrato poter accadere il signor la Grange in una Memoria, di cui a suo luogo parleremo.

La teoria dei movimenti di questi pianeti non è ancora ricondotta all' ultimo grado di esattezza; essa è sottoposta a grandi difficoltà in grazia della forte eccentricità delle loro orbite, e della loro vicinanza a Giove, che per la sua gran massa esercita sopra di essi una possente azione, e perturba notabilmente i loro movimenti ellittici. Noi ci contenteremo di qui riferire gli elementi delle loro orbite, attendendo dall' attività degli Astronomi il perfezionamento della loro teoria, e le tavole dei loro moti.

1.° Elementi ellittici di Cerere per la decimaterza volta corretti dal signor dott. Gauss:

Epoca dei moti medj, Gottinga, o Gennajo 1801 = 77° 18′ 36″,5;
Perielio = 146° 26′ 0″,1; suo moto annuo = + 2′ 1″,3;
Moto diurno medio = 770″,9230; log. semiass. mag. = 0,4420486;
Eccentr. per o Genn. 1806 = 0,0785028; ann. variaz. = — 0,00000583;
Longit. nodo asc. pel 1806 = 80° 53′ 41″,3; ann. moto = + 1″,48;
Inclinazione all' ecclittica . = 10 37 31 ,2; ann. variaz. = — 0 ,44.

2.° Elementi ellittici di Pallade dal signor Gauss ricavati dalle sei opposizioni degli anni 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809:

Epoca dei moti medj, Gottinga, o Gennajo 1803 = 221° 34′ 53″,64;
Moto diurno medio = 770″,5010; log. semiass. magg. = 0,4422071;
Longit. del periel. = 121° 8′ 8″,54; longit. del nodo = 172° 28′ 12″,73;
Inclin. all' ecclitt. = 34 37 28 ,35; eccentricità = 0,2447424.

3.° Elementi ellittici di Giunone per l'ottava volta corretti dal signor dott. Gauss:

Epoca dei moti medj, Gottinga, o Gennajo 1804 = 320° 1′ 20″,1;
Moto diurno medio = 814″,324; log. semiass. magg. = 0,4261833;
Long. del per. nel 1805 = 53° 10′ 53″,9; long. del nod.(1805) = 171° 4′ 11″,3;
Inclinaz. all' ecclittica = 13 4 11,0; eccentricità = 0,2554521.

4.° Elementi ellittici di Vesta secondo i miei risultamenti (Mem. della Soc. Ital. tom. XVII):

Epoca al meridiano di Padova, o Gennajo 1810 = 105° 56′ 34″,5;
Moto diurno medio = 977″,7699; log. semiass. magg. = 0,3732206;
Long. del periel. (1810) = 249° 19′ 55″,2; sua var. ann. = + 1′ 34″,24;
Long. d. nod. asc. (1810) = 103 11 31 ,3; sua var. ann. = + 0 15 ,63;
Inclin. all' ecclit. (1810) = 7 8 2 ,4; ann. variaz. = — 0 ,12;
Eccentricità . (1810) = 0,0884972; ann. variaz. = + 0,000004009.

Apparenze dell' anello di Saturno.

278. Giove, Saturno ed Urano veduti col cannocchiale sono sempre accompagnati da alcuni piccoli astri, che intorno ad essi in diversi tempi si avvolgono, e presentar devono dal centro di questi pianeti apparenze simili a quelle che noi osserviamo nella Luna. Nel capitolo seguente esporremo la teorica dei movimenti di questi corpiceiuoli, e per ora ci contenteremo di riferire nel quadro planetario gli elementi delle loro orbite, affinchè abbia in una tavola sola il lettore sott' occhio tutto ciò che concerne il nostro sistema solare. Qui vogliamo più da vicino considerare le forme singolari che ci presenta Saturno, qualora con forti telescopj venga egli osservato.

279. Apparisce pertanto Saturno quasi sempre accompagnato da un anello di figura ellittica, i cui semiassi non conservano fra loro lo stesso rapporto, poichè in alcune circostanze egli ha una notabile ampiezza da presentarsi come una corona ellittica sospesa intorno al suo globo rotondo; talvolta apparisce l' asse minore di questa corona ristringersi a segno da sembrare quasi da una parte appoggiato sopra di esso, mentre dall' altra di dietro si nasconde, nel qual caso chiaramente si osserva, coll' ajuto di forti telescopj, l' ombra dell' anello projettata sul disco di Saturno da quella parte, ove egli nel medesimo sembra appoggiato. Per fine si ristringe talora a segno che rimane impercettibile anche nei migliori cannocchiali, e soltanto il celebre Herschel con i suoi forti telescopj ha potuto distinguerlo in foggia di sottilissimo filo luminoso, mentre per tutti gli altri Astronomi si era reso invisibile.

Queste apparenze sono periodiche, e variando colla posizione geocentrica di Saturno tornano le medesime, mentre egli ritorna alle stesse longitudini, e perciò si riproducono dopo un' intera rivoluzione periodica del pianeta. La *figura* 57 presenta la figura di Saturno da sette anni e mezzo a sette anni e mezzo, mentre passa successivamente per le longitudini di 347°, 77°, 167°, 257°. Nel tempo intermedio passa quasi gradatamente da una forma all' altra. La *figura* 58 presenta Saturno colle sue fascie veduto nel tempo della massima ampiezza dell' anello.

L' astronomo Pound nell' anno 1719 avendo prese le dimensioni dell' anello, di Saturno, e dello spazio vuoto fra l' anello e Saturno trovò che stava il diametro dell' anello a quello di Saturno come 7:3, che lo spazio vuoto tra il globo e l' anello era prossimamente uguale alla larghezza dell' anello, mentre questa era all' incirca la terza parte del diametro del pianeta, le quali dimensioni sono confermate eziandio dalle osservazioni e misure di altri Astronomi.

Supponendo pertanto il diametro di Saturno nella sua media distanza dalla terra = 18″, sarà il diametro esterno dell'anello = 42″, l'interno = 30″, la larghezza dell'anello = 6″, ed il vacuo fra l'anello ed il globo pure = 6″.

Herschel avendo attentamente, e per lungo tempo osservato l'anello, scuoprì non solo sopra di esso quelle striscie nere, che da Cassini ed altri erano già state vedute, ma vedendole più larghe verso gli estremi dell'asse maggiore, e quindi con regolarità impiccolirsi a misura che si protraevano verso l'asse minore della corona, giudicò che l'anello intorno a Saturno sospeso fosse formato da due anelli concentrici e distinti.

Nè di questa sola scoperta va debitrice la moderna Astronomia ad Herschel intorno a questo anello maraviglioso: egli osservò inoltre sugli orli dell'anello esteriore alcuni punti salienti, che più da vicino considerati gli fecero in esso scuoprire una rotazione intorno ad un asse al suo piano perpendicolare, nell'intervallo di $10^h\ 32'$. La rotazione dell'anello interno non è stata osservata; non sembra però potersi rivocare in dubbio, massime dopo che il celebre la Place nella sua meccanica celeste ha mostrato essere necessaria una rotazione negli anelli di Saturno, perchè possano stare le loro molecole in equilibrio in virtù delle attrazioni scambievoli, e di quelle provenienti da Saturno.

Questa teoria, che va così bene d'accordo colle osservazioni di Herschel, sembra annullare i risultamenti, ai quali è stato il signor Schroeter condotto dalle proprie sue osservazioni, avvegnachè a lui sembrò che gli anelli di Saturno non fossero di alcun moto rotatorio dotati.

Il signor Harding in Gottinga, ed il signor Schwabe in Dessau osservando con forti e precisi telescopj Saturno, rimarcarono un'eccentricità nell'anello rapporto al centro del pianeta in modo che questi rimanesse alcun poco nella parte occidentale dell'anello. Il signor Struwe all'Osservatorio di Dorpat in Russia con un eccellente rifrattore di Fraunhofer di 14 piedi di foco, e 9 pollici di apertura, montato paralatticamente con un roteggio che lo guida sulla direzione del moto diurno degli astri, munito di un eccellente micrometro filare a ripetizione, nel Marzo ed Aprile del 1828 si accinse a verificare con misure dirette la stima dei lodati due Astronomi, e trovò non senza sua sorpresa sussistere un'eccentricità nel senso da essi indicato. Ecco i risultamenti di queste misure consegnate nel N. 139 delle notizie astronomiche del signor Schumacher (vol. VI pag. 390) ridotte alla distanza media 9,53877 di Saturno dal Sole.

Distanza dell'esterno limite occidentale dell'anello dal globo = 11″,073
dell'esterno limite orientale dell'anello dal globo = 11 ,288
Differenza (risultante dal medio di 15 osservazioni) . . = 0 ,215.

Lo stesso Astronomo col medesimo stromento prese eziandio le dimensioni tutte dell' anello e del globo di Saturno che pubblicò nel N. 97 della stessa raccolta, ed alle quali fece poi una leggera correzione nel N. 130. Stimiamo opportuno di qui riferire i risultamenti delle sue misure ridotte alla indicata distanza media pochissimo da quelle di Pond differenti, ma che per la esimia bontà dello stromento, e per la nota abilità dell'osservatore meritano tutta la confidenza.

1.	Diametro esterno dell' anello esteriore . . .	40",095
2.	interno	35 ,289
3.	Diametro esterno dell' anello interno	34 ,475
4.	interno	26 ,668
5.	Diametro equatoriale di Saturno	17 ,991
6.	Larghezza dell' anello esterno	2 ,403
7.	del vacuo fra gli anelli	0 ,408
8.	dell' anello interno	3 ,903
9.	Distanza dell' anello da Saturno	4 ,339
10.	Raggio equatoriale di Saturno	8 ,995.

280. Dopo aver riferito le fasi principali che ci presenta l' anello di Saturno dietro le osservazioni, vediamo brevemente come si spieghino dagli Astronomi queste varie apparenze. Galileo fu il primo che nel 1612 discoprì di qua e di là da Saturno due anse luminose, che egli credè satelliti: ma ad Hugenio si deve la vera spiegazione delle fasi osservate. Finge pertanto l' Hugenio e tutti gli Astronomi dietro di lui, Saturno circondato da una corona circolare, opaca, sottilissima, ad esso concentrica, sospesa, o dirò così equilibrata in un piano particolare, il quale rimane sempre a se stesso paralello durante la rivoluzione periodica di Saturno; quindi i suoi nodi nell' ecclittica e la sua inclinazione rimarranno costanti. Dietro una tale supposizione è chiaro che l' anello sarà visibile quando la faccia illuminata dal Sole sia verso noi rivolta, ed invisibile quando sia rivolta ad altra parte, nel qual caso sopra il globo di Saturno apparirà la sua ombra; sparirà per noi quando il suo piano passa pel centro della terra, poichè allora non essendo veduto che per la sua grossezza più non sarà visibile, o almeno con i più forti telescopj non potrà vedersi che come un sottilissimo filo luminoso. Se poi il suo piano passi per il centro del Sole, sarà del pari invisibile, perchè illuminato direttamente nella sua grossezza; le faccie dell' anello riceveranno piccola porzione di luce, che radendole quasi paralellamente, non giunge fino a noi, ma in altra parte è riflessa. Quando poi la faccia illuminata dal Sole è verso la terra rivolta, sarà allora visibile l' anello, ed a motivo della sua gran distanza, si vedrà da noi ortograficamente projettato nel pia-

no perpendicolare alla linea che unisce il nostro occhio col centro di Saturno, linea che sensibilmente confondesi con quella condotta dal centro della terra al centro di Saturno, poichè in questa ricerca la sua paralasse è trascurabile. Se pertanto chiamiamo E l'angolo che fa questa linea col piano dell'anello, e quindi $90° - E$ l'angolo che il piano dell'anello fa col piano soprannominato di projezione, dietro i principj della projezione ortografica, che verranno da noi esposti nel secondo volume, esso apparirà sotto la forma di un'armilla ellittica, il cui asse maggiore sarà situato nell'intersezione del suo piano con quello di projezione, ed uguale al diametro apparente dell'anello, che porremo $= 2c$; il minore poi sarà a questo perpendicolare, ed $= 2c \cos(90° - E) = 2c \operatorname{sen} E$.

Per giudicare adunque della figura dell'anello conviene ad ogni istante assegnare il valore dell'angolo E. Ora è facile vedere che questo angolo è uguale, ma di segno contrario, a quello che fa la linea condotta ai centri della terra e di Saturno con un piano parallelo al piano dell'anello guidato per il centro della terra. Posto ciò, la *figura* 56 rappresenti la sfera celeste, il cui centro supponesi nel centro della terra; $E \Omega C$ sia l'ecclittica; $H \Omega G$ rappresenti la sezione del piano parallelo all'anello con la sfera celeste; Υ l'equinozio di primavera, cosicchè la longitudine del nodo dell'anello sia $\Omega \Upsilon = N$; P sia il polo dell'ecclittica, S quello dell'anello. Saturno veduto dalla terra apparisca in F con una longitudine geocentrica $\Upsilon Q = l'$, ed una latitudine $FQ = \lambda'$. Per i due poli S, P condotto un circolo massimo sarà Ω il polo di questo circolo; e condotti gli archi PFQ, SFN, sarà evidentemente FN la misura dell'angolo che la linea condotta dalla terra a Saturno fa col piano del circolo $H \Omega G$ parallelo all'anello.

Ora nel triangolo sferico SPF abbiamo $SP = HE =$ inclinazione dell'anello all'ecclittica, che porremo $= I$, $PF = 90 - \lambda'$, $SPF = C\Omega + \Omega Q = 90 + l' - N$. Quindi avremo

$$\cos SF = \operatorname{sen} NF = \cos I \operatorname{sen} \lambda' - \operatorname{sen} I \cos \lambda' \operatorname{sen}(l' - N),$$

ovvero (rammentando che $NF = -E$)

$$\operatorname{sen} E = \operatorname{sen} I \cos \lambda' \operatorname{sen}(l' - N) - \cos I \operatorname{sen} \lambda' \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

la quale porgerà il cercato angolo E, quando si saranno determinati I ed N. Se sarà $E = 0$ l'anello sarà invisibile, o tutto al più potrassi presentare come una sottilissima linea luminosa, e tanto più ristretta sarà la corona ellittica sotto cui presentasi l'anello quanto minore sarà l'angolo E.

Conviene per altro osservare, che per poter vedere l'anello, rendesi indispensabile che abbia rivolta la superficie illuminata dal Sole verso la terra, il che accaderà se il suo piano prolungato non pas-

serà fra il Sole e la terra, ma entrambi rimarranno da una medesima parte; o in altri termini, se gli angoli formati dalle linee condotte dal centro del Sole e della terra al centro di Saturno faranno col piano dell' anello due angoli, i quali abbiano lo stesso segno, nel qual caso soltanto saranno esse da una stessa parte disposte. Se pertanto chiameremo ι l'angolo formato dal raggio vettore eliocentrico col piano dell'anello; l, λ la longitudine e la latitudine eliocentrica di Saturno, con un ragionamento analogo a quello fatto di sopra troveremo

$$\operatorname{sen} \iota = \operatorname{sen} I \cos \lambda \operatorname{sen} (l - N) - \cos I \operatorname{sen} \lambda \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Risulta da quanto precede, che per la sparizione dell'anello basta che sia $\iota = 0$, ovvero $E = 0$, e per la sua riapparizione devono essere E ed ι dello stesso segno.

281. Per ridurre le formole precedenti a numeri conviene determinare i costanti I ed N che esse contengono. Le equazioni (1), (2) porgono il mezzo di determinarle coll'ajuto delle osservazioni delle disparizioni e riapparizioni. Noi però non ci tratterremo in questi esami e discussioni, che si possono vedere nel terzo volume dell'Astronomia del signor de Lambre, e solo ci contenteremo di riferire i risultamenti ottenuti dal signor Bessel, esposti anco nelle Effemeridi di Milano per il 1819 dal chiarissimo signor Plana in una sua interessante e dotta Memoria intorno alle apparenze dell'anello, ed alle configurazioni dei satelliti di Saturno, che sono i seguenti

$$I = 28^\circ\, 34'\, 6'' ; \quad N = 166^\circ\, 52'\, 1'' + (t - 1800)\, 40'',57,$$

ove t esprime l'anno, e frazione d'anno corrispondente al giorno dato, ed il numero $40'',57$ esprime l'annuo incremento della longitudine del nodo. La riferita longitudine del nodo deve per modo intendersi che quando la terra passa per 167° di longitudine essa comincia a vedere la faccia boreale, e vede la faccia australe al di là di 347°.

282. Resta per ultimo che determiniamo sopra il piano di projezione la posizione dell'asse minore rapporto al circolo di latitudine condotto pel centro di Saturno. Se c'immaginiamo (*Fig.* 56) condotto per il punto F un piano tangente alla sfera celeste, riuscendo esso perpendicolare alla retta guidata dal centro della sfera al punto F, sarà il piano di projezione dell'anello; ed essendo il piano del circolo SFN perpendicolare al piano dell'anello, l'asse minore si troverà nell'intersezione di esso col piano di projezione. Siccome poi il circolo di latitudine nel piano di projezione è rappresentato dall'intersezione del piano PFQ collo stesso piano di projezione, perciò l'asse minore dell'anello farà colla projezione del circolo di latitudine un angolo $= PFS$. Ora dal triangolo PSF, in cui conosconsi i lati PF, PS, e l'angolo compreso FPS, avremo, dietro le formule del caso III (Trig. XV),

$$\cot P F S = \frac{\cot P S \operatorname{sen} P F - \cos F P S \cos P F}{\operatorname{sen} F P S},$$

la quale, posto $P F S = \psi$, e ritenute d' altronde le precedenti denominazioni, cangiasi nella seguente

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\operatorname{tang} I \cos (l' - N)}{\cos \lambda' + \operatorname{tang} I \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{sen} (l' - N)} \quad . \quad . \quad (3)$$

Da tutto ciò che precede sarà facile costruire l' apparente figura dell' anello di Saturno ad un istante qualunque, per cui conoscasi la posizione di questo pianeta. Si calcoleranno gli angoli E, ϵ colle equazioni (1), (2). Se nessuno di essi sarà $= 0$, e se avranno lo stesso segno, sarà visibile l' anello sotto la forma di una corona ellittica, il cui semiasse maggiore starà al semiasse minore, come $1 : \operatorname{sen} E$, ed il semiasse minore farà con una linea rappresentante il circolo di latitudine un angolo $= \psi$ per modo disposto, che la estremità settentrionale del semiasse minore sia all' occidente del circolo di latitudine, se ψ calcolato dietro l' equazione (3) è positivo, e viceversa rimanga all' oriente se ψ è negativo.

QUADRO del sistema planetario per l'epoca 0 Gennajo 1801 al meridiano di Padova.

PIANETI PRIMARJ

(de Lambre Astronomie Tom. II. pag. 619.)

Pianeti	Rivoluzioni siderali	Movimento tropico in 100 anni Giuliani	Semiassi maggiori	Eccentricità dell' orbita
Mercurio	87^{g}, 9692580	415^{c} 74° 4' 20"	0, 3870981	0, 2055494
Venere	224, 7008240	162 199 13 0	0, 7233323	0, 0068298
Terra	365, 2563835	100 0 45 45	1, 0000000	0, 0167976
Marte	686, 9796186	53 61 42 10	1, 5236935	0, 0931340
Giove	4332, 5963076	8 156 17 33	5, 2027911	0, 0481784
Saturno	10758, 9698400	3 143 31 36	9, 5387705	0, 0616830
Urano	30688, 7126872	1 69 51 20	19, 1833050	0, 0466703

Pianeti	Longitud. medie 0 Gennajo 1801	Longit. del perielio	Longit. del nodo ascen	Inclinazione	Diametri alla distanza = 1
Mercurio	161° 47' 10"	74° 21' 47"	45° 57' 31"	7° 0' 0"	6", 6
Venere	9 53 58	128 37 1	74 52 40	3 23 35	16, 5
Terra	99 38 5	99 30 5	. . . .	. . . .	17, 2
Marte	63 50 29	332 24 24	48 1 28	1 51 0	8, 9
Giove	112 9 59	11 8 35	98 25 34	1 18 52	186, 8
Saturno	135 19 29	89 8 59	111 55 47	2 29 38	171, 7
Urano	177 46 56	347 21 42	72 51 14	0 46 25	74, 5

Pianeti	Variaz. secolare dell' eccentricità	Moto secol. sid. del peri.	Moto secol. sid. del nodo	Var. secol. dell' inclin.	Dis. med. dal ☉ in leg. di 2000 t.
Mercurio	+ 0,00000. 3867	+ 583", 56	— 782", 27	+ 18", 1828	15185465
Venere	— 0,00006. 2711	— 267, 60	— 1869, 80	— 4, 5522	28375600
Terra	— 0,00004. 1632	+ 1177, 81	. . . .	. . . .	39229000
Marte	+ 0,00009. 0176	+ 1582, 43	— 2328, 44	— 0, 1523	59772960
Giove	+ 0,00015. 9350	+ 663, 86	— 1577, 57	— 22, 6087	204100280
Saturno	— 0,00031. 2402	+ 1943, 07	— 1266, 46	— 15, 5131	374196340
Urano	— 0,00002. 5072	+ 238, 62	— 3597, 96	+ 3, 1331	752540172

Pianeti	Distanza mass. dalla Terra leg.	Dist. min. in leghe	Diametro in leghe	Diam. rapp. alla Terra	Volu. rapp. alla Terra
Mercurio	58193567	20264453	1255	0, 3838	0, 0565
Venere	68457327	10000671	3138	0, 9593	0, 8828
Terra	. . . .	. . . .	3271	1, 0000	1, 0000
Marte	105227117	14318803	1693	0, 5174	0, 1386
Giove	253820766	154379794	35527	10, 8600	1280, 9
Saturno	435101578	313291102	32655	9, 9825	974, 78
Urano	826875829	678204515	14169	4, 3314	81, 26

PIANETI SECONDARJ

(*Piazzi Lezioni d' Astronomia T. II. pag. 297.*)

		Rivoluzioni siderali	Semiasse magg. in parti del raggio del pianeta	Semiasse magg. in parti della dist. med. d. Ter. dal Sol.	Sem. magg. in leghe di 2000 tese
Luna		27^{g}, 3216669	60, 31795	0, 0025147	98650
Satelliti di Giove	1	1 , 7691378	5, 81296	0, 0026322	103259
	2	3 , 5511810	9, 24868	0, 0041879	164289
	3	7 , 1545528	14, 75240	0, 0066801	262054
	4	16 , 6887697	25, 94686	0, 0117492	460907
Satelliti di Saturno	1	0 , 94271	3, 080	0, 0013216	50289
	2	1 , 37024	3, 952	0, 0016449	64526
	3	1 , 88780	4, 893	0, 0020365	79890
	4	2 , 73948	6, 268	0, 0026088	102341
	5	4 , 51749	8, 754	0, 0036435	142931
	6	15 , 94530	20, 295	0, 0084470	331366
	7	79 , 32960	59, 154	0, 0246215	965837
Satelliti di Urano	1	5 , 8926	13, 120	0, 0023690	92949
	2	8 , 7068	17, 022	0, 0030741	120592
	3	10 , 9611	19, 845	0, 0035833	140592
	4	13 , 4559	22, 752	0, 0041089	161187
	5	38 , 0750	45, 507	0, 0082183	322395
	6	107 , 6944	91, 008	0, 0164360	644746

Diametro del Sole alla distanza media = 32' 2",0; in parti di quello della terra = 111,74. Volume del Sole rapporto alla terra = 1395324,4.

Diametro della Luna nella sua distanza media dalla Terra = 31' 7",7; in parti di quello della Terra = 0,2730; alla distanza media della Terra dal Sole = 4",7; in leghe = 893. Volume della Luna in parti di quello della Terra = 0,0146o.

CATALOGO

delle Comete osservate fino alla fine dell' anno 1829, delle quali è stata calcolata l' orbita parabolica, ellittica od iperbolica.

	Num. e Direzione	Passaggio al perielio. Tempo med. in Parigi — Anni	Gior. dell' anno	Longitud. del perielio $=\pi$	Longitud. del nodo $=\Omega$	Inclinaz. all' ecclittica $=i$	Distanza perielia $=q$	Eccentricità $=e$	Nome dei Calcolatori
VECCHIO STILE	1 D	240	315, 00000	271° 0′ 0″	189° 0′ 0″	44° 0′ 0″	0. 3710000	— — —	Burkardt (?).
	2 D	539	293, 64583	313 30 0	58 ov. 238	10 — —	0. 3412000	— — —	Burkardt (?).
	3 R	565	190, 00000	88 — —	158 — —	62 — —	0. 7190000	— — —	Burkardt (?).
	4 R	837	60, 00000	289 3 0	206 33 0	10 ov. 12	0. 5800000	— — —	Pingré.
	5 R	989	255, 00000	264 0 0	84 0 0	17 — —	0. 5680000	— — —	Burkardt.
	6 R	1066	150, ov. 151	120 — —	260 — —	70 ov. 80	0. 3400000	— — —	Pingré.
	7 D	1097	264, 37500	332 30 0	207 30 0	73 30 0	0. 7385000	— — —	Burkardt.
	8 D	1231	30, 30694	134 48 0	13 30 0	6 5 0	0. 9477600	— — —	Pingré.
	9 D	1264	198, 00000	272 30 0	175 30 0	30 25 0	0. 4300000	— — —	Pingrè.
	10 R	1299	90, 31805	3 20 0	107 8 0	68 37 0	0. 3179300	— — —	Pingré.
	11 D	1301	243 !	180 !	60 !	80 !	0. 33 !	— — —	Burkardt.
	12 R	1337	152, 02778	20 0 0	66 22 0	32 11 0	0. 6445200	— — —	Pingré.
	13 D	1351	330, 5 !	69 !	— — —	— — —	1. 0	— — —	Burkardt.
	14 R	1362	70, 20833 !	219 !	249 !	21 !	0. 4558 !	— — —	Burkardt.
	15 R	1456	160, 92360	301 0 0	48 30 0	17 56 0	0. 5855200	— — —	Pingré.
	16 R	1472	59, 93958	45 33 30	281 46 20	5 20 0	0. 5427300	— — —	Halley.
	(15) R	1531	237, 79860	301 12 0	45 30 0	17 0 0	0. 5799300	0. 967373	Halley.
	17 D	1532	292, 33889	111 48 0	87 23 0	32 36 0	0. 5192200	— — —	*Olbers.*
	18 D	1533	165, 88949	217 40 0	299 19 0	28 14 0	0. 3268600	— — —	*Olbers (?).*
	(9) D	1556	112, 84236	278 50 0	175 42 0	32 6 30	0. 4639000	— — —	*Halley.*
	19 R	1558	222, 54166	329 49 0	332 36 0	73 49 0	0. 5773000	— — —	Olbers.
	20 R	1577	299, 78819	129 22 0	25 52 0	74 32 45	0. 1834200	— — —	Halley.
	21 D	1580	333, 57917	109 11 55	19 7 37	64 31 50	0. 5955300	— — —	Pingré.
	22 R	1582	126, 67292	245 23 10	231 7 20	61 27 50	0. 2256950	— — —	Pingré (?).
NUOVO STILE	23 D	1585	280, 81250	8 51 0	37 42 30	6 4 0	1. 0935800	— — —	Halley.
	24 R	1590	59, 16319	216 54 30	165 30 40	29 40 40	0. 5766100	— — —	*Halley.*
	25 D	1593	199, 57500	176 19 0	164 15 0	87 58 0	0. 0891100	— — —	La-Caille.
	26 R	1596	221, 65486	238 30 50	315 36 50	52 9 45	0. 5494240	0. 9670888	Pingré.
	(15) R	1607	299, 72244	301 38 10	48 40 28	17 12 17	0. 5879740	— — —	Bessel.
	27 D	1618	229, 13333	318 20 0	293 25 0	21 28 0	0. 5129800	— — —	Pingré.
	28 D	1618	312, 35711	3 5 21	75 44 10	37 11 21	0. 3895440	— — —	Bessel.
	29 D	1652	317, 65972	28 18 40	88 10 0	79 28 0	0. 8475000	— — —	Halley.
	30 D	1661	26, 88750	115 16 8	81 54 0	33 0 55	0. 4427270	— — —	Mechain.
	31 R	1664	339, 50139	130 41 25	81 13 55	21 18 40	1. 0257550	— — —	Halley.
	32 R	1665	114, 22581	71 54 30	228 2 0	76 5 0	0. 1064900	— — —	Halley.
	33 D	1672	61, 36597	46 59 30	297 30 30	83 22 10	0. 6973900	— — —	Halley.
	34 R	1677	126, 03276	137 37 5	236 49 10	79 3 15	0. 2805900	— — —	Halley.
	35 D	1678	238, 59236	327 46 0	161 40 0	3 4 20	1. 2380200	— — —	Douwes.
	36 D	1680	352, 99687	262 49 5	272 9 29	60 40 16	0. 0062224	0. 999985417	Enke.
	(15) R	1682	257. 74000	302 3 45	51 7 10	17 48 0	0. 5824280	0. 9676763	Burkardt.
	37 R	1683	194, 12430	85 29 30	173 23 0	83 11 0	0. 5602000	— — —	Halley.
	38 D	1684	160, 43471	238 52 0	268 15 0	65 48 40	0. 9601500	— — —	Halley.
	39 D	1686	259, 61319	77 0 30	350 34 40	31 21 40	0. 3250000	— — —	Halley.
	40 R	1689	335, 62847	263 44 45	323 45 20	69 17 0	0. 0168890	— — —	Pingré.
	41 D	1695	321, — —	66 — —	216 — —	22 — —	0. 8438	— — —	Burkardt.
	42 R	1698	291, 71319	270 51 15	267 44 15	11 46 0	0. 6912900	— — —	Halley.
	43 R	1699	13, 35555	212 31 6	321 45 35	69 20 0	0. 7440000	— — —	La-Caille.
	44 R	1701	290, 91667	133 41 0	298 41 0	41 39 0	0. 5926300	— — —	Burkardt.

Num. e Direzione	Passaggio al perielio, Tempo med. in Parigi — Anni	Gior. dell'anno	Longitud. del perielio $= \pi$	Longitud. del nodo $= \omega$	Inclinaz. all' ecclittica $= i$	Distanza perielia $= q$	Eccentricità $= e$	Nome dei Calcolatori
45 D	1702	72, 61300	135° 40′ 34″	188° 59′ 10″	4° 24′ 44″	0. 6468300	— — —	Burkardt.
46 D	1706	30, 18889	72 29 10	13 11 40	55 14 10	0. 4258100	— — —	La-Caille.
47 D	1707	345, 98541	79 54 56	52 46 35	88 36 0	0. 8597400	— — —	La-Caille.
48 R	1718	14, 99167	121 30 0	128 43 0	30 20 0	1. 0265500	— — —	La-Caille.
49 R	1723	270, 86020	52 35 12	14 10 2	49 55 25	0. 9997070	1. 019956	Burkardt.
50 D	1729	164, 27014	320 51 22	310 38 0	77 5 18	4. 0434960	1. 0050334	Burkardt.
51 D	1737	30, 35417	325 55 0	226 22 0	18 20 45	0. 2228200	— — —	Bradley.
52 D	1737	159, 32500	262 36 39	123 55 43	39 14 5	0. 8670000	— — —	Danssy.
53 R	1739	168, 46319	102 34 0	207 18 0	55 53 0	0. 6716000	— — —	Zannotti.
54 R	1742	39, 31944	217 39 10	185 42 41	66 52 4	0. 7655000	— — —	Zanotti.
55 D	1743	10, 89233	92 58 4	68 10 48	2 15 50	0. 8381150	— — —	Struyck.
56 D	1743	263, 86305	246 33 52	5 16 25	45 48 21	0. 5215700	— — —	Klinkenborg.
57 D	1744	61, 33472	197 11 58	45 46 6	47 10 53	0. 2222200	— — —	Eulero.
58 R	1747	62, 42198	277 2 5	147 18 42	79 6 45	2. 1985900	— — —	Maraldi.
59 R	1748	119, 81579	215 0 50	232 52 16	85 26 57	0. 8406650	— — —	Maraldi.
60 D	1748	170, 89399	278 47 10	33 8 29	67 3 28	0. 6253570	— — —	Bessel.
61 D	1757	294, 33611	122 58 0	214 12 50	12 50 20	0. 3375420	— — —	Bradley.
62 D	1758	162, 14375	267 38 0	230 50 0	68 19 0	0. 2153500	— — —	Pingré.
(15) R	1759	71, 58975	303 10 1	53 50 11	17 37 12	0. 5845744	0. 96754386	Burkardt.
63 D	1759	331, 00830	53 34 10	139 39 41	79 6 58	0. 8013900	— — —	Pingré.
64 R	1759	350, 88403	138 24 35	79 50 45	4 51 32	0. 9659000	— — —	La-Caille.
65 D	1762	148, 34100	104 2 0	348 33 5	85 38 15	1. 0090480	— — —	Burkardt.
66 D	1763	305, 86790	84 68 58	356 24 4	72 31 52	0. 4982860	0. 998680	Burkardt.
67 R	1764	43, 56941	15 26 5	120 7 33	52 46 39	0. 5567000	— — —	Pingré.
68 R	1766	48, 36805	143 15 25	244 10 50	40 50 20	0. 5053300	— — —	Pingré.
69 D	1766	116, 99533	251 13 0	74 11 0	8 1 45	0. 3989800	0. 864000	Burkardt.
70 D	1769	280, 62688	144 11 29	175 3 59	40 45 50	0. 1227550	0. 99924901	Bessel.
71 D	1770	225, 52610	356 15 11	131 54 54	1 34 31	0. 6743600	0. 7854736	Burkardt.
72 R	1770	326, 24167	208 22 44	108 42 10	31 25 55	0. 5282400	— — —	Pingré.
73 D	1771	109, 18446	103 57 52	27 56 16	11 15 28	0. 9020537	— — —	Enke.
74 D	1772	51, 12708	110 6 0	252 25 54	18 51 6	1. 0281200	0. 903148	Bessel.
75 D	1773	248, 61329	75 10 58	121 5 30	61 14 17	1. 1268900	— — —	Burkardt.
76 D	1774	227, 83660	317 27 40	180 44 34	83 20 6	1. 4328690	1. 0282955	Burkardt.
77 D	1779	4, 10035	87 13 40	25 3 57	32 25 30	0. 7131870	— — —	D'Angos.
78 R	1780	274, 75891	246 21 18	124 9 19	53 48 15	0. 0992560	— — —	Mechain.
79 R	1780	333, 85139	246 52 —	121 1 —	72 3 30	0. 5152800	— — —	Olbers.
80 D	1781	188, 19557	239 11 25	83 0 38	81 43 26	0. 7758610	— — —	Mechain.
81 R	1781	333, 52970	16 3 7	77 22 55	27 12 4	0. 9609950	— — —	Mechain.
82 D	1783	323, 50013	50 3 8	55 45 20	44 53 24	1. 4544000	0. 5395345	Burkardt.
83 R	1784	21, 20610	80 44 24	56 49 21	51 9 12	0. 7078580	— — —	Mechain.
84 D	1785	27, 33200	109 51 56	264 12 15	70 14 12	1. 1433980	— — —	Mechain.
85 R	1785	98, 47847	297 34 40	64 44 40	87 7 0	0. 4275870	— — —	Saron.
86 D	1786	30, 85694	156 38 0	334 8 0	13 36 0	0. 3258600	0. 84836	Enke.
87 D	1786	189, 57248	158 38 30	195 23 52	50 58 33	0. 3942400	— — —	Reggio.
88 R	1787	130, 83195	7 44 9	106 51 35	48 15 51	0. 3489100	— — —	Saron.
89 R	1788	315, 31598	99 8 27	157 12 38	12 28 20	1. 0631200	— — —	Mechain.
90 D	1788	325, 30903	22 49 54	352 24 26	64 30 24	0. 7573130	— — —	Mechain.
91 R	1790	15, 21875	60 14 32	176 11 46	31 54 15	0. 7530970	— — —	Saron.
92 D	1790	28, 32327	111 44 37	267 8 57	56 58 13	1. 0632860	— — —	Mechain.
93 R	1790	140, 47917	274 52 20	35 14 0	63 35 0	0. 7910050	— — —	Englefield.
94 R	1792	13, 57238	36 29 42	190 46 15	39 46 55	1. 2930230	— — —	Mechain.
95 R	1792	362, 53087	135 52 35	283 14 44	49 7 13	0. 9668290	— — —	Piazzi.
96 R	1793	308, 84791	228 42 0	108 29 0	60 21 0	0. 4034	— — —	Saron.
97 D	1793	332, 60631	85 58 58	359 4 48	47 35 5	1. 4002600	0. 7347635	Burkardt.
(86) D	1795	355, 47584	156 32 0	334 17 35	13 39 34	0. 3356600	0. 8484604	Enke.
98 R	1796	93, 82993	192 44 13	17 2 16	64 54 33	1. 5781600	— — —	Olbers.

Num. e Direzione	Passaggio al perielio. Tempo med. in Parigi		Longitud. del perielio = π	Longitud. del nodo = ☊	Inclinaz. all' ecclittica = i	Distanza perielia = q	Eccentricità = e	Nome dei Calcolatori
	Anni	Gior. dell'anno						
99 R	1797	190, 11147	49° 27′ 8″	329° 15′ 37″	50° 40′ 34″	0. 5266100	— — —	Olbers.
100 D	1798	94, 50529	105 6 57	122 12 21	43 44 42	0. 4845860	— — —	Burkardt.
101 R	1798	365, 92031	33 55 5	249 30 2	42 14 51	0. 7747900	— — —	Olbers.
102 R	1799	250, 23848	3 39 10	99 27 19	50 57 50	0. 8401780	— — —	Zach.
103 R	1799	359, 79433	190 14 51	326 27 18	77 0 47	0. 6244500	— — —	Olbers.
104 R	1801	220, 56389	183 49 —	44 28 —	21 20 —	0. 2617	— — —	Burkardt.
105 D	1802	252, 89756	332 9 4	310 15 39	57 0 47	1. 0941700	— — —	Olbers.
106 D	1804	44, 59463	148 44 51	176 47 58	56 28 40	1. 0711700	— — —	Gauss.
(86) D	1805	325, 49766	156 43 52	334 23 52	13 32 43	0. 3406640	0. 8464956	Enke.
(74) D	1806	1, 98070	109 32 23	251 15 15	13 38 45	0. 9068010	0. 7457840	Gambard.
107 R	1806	362, 91829	94 4 30	322 18 37	35 4 5	1. 0819300	— — —	Bessel.
108 D	1807	261, 85825	271 6 8	266 40 52	63 13 7	0. 6484600	— — —	Oriani.
—	1807	261, 82717	271 6 8	266 36 52	63 14 28	0. 6489600	0. 99503475	Bessel.
—	1807	261, 74537	270 54 42	266 47 12	63 10 28	0. 6461238	0. 99548781	Bessel.
109 D	1808	194, 17418	252 38 50	24 11 15	39 18 59	0. 6078600	— — —	Bessel.
110 D	1810	278, 82930	63 9 10	308 53 4	62 46 17	0. 9691400	— — —	Bessel.
111 R	1811	255, 26580	75 0 34	140 24 44	73 2 21	1. 0354228	0. 9950933	Argelander.
112 D	1811	314, 99697	47 27 27	93 1 52	31 17 21	1. 5821070	0. 98271088	Nicolai.
113 D	1812	259, 32006	92 18 44	253 1 3	73 57 3	0. 7771403	0. 9545412	Enke.
114 R	1813	63, 53130	69 57 29	60 35 54	21 9 49	0. 6991970	— — —	Werner.
115 R	1813	139, 43547	197 43 46	42 40 40	81 2 28	1. 2161000	— — —	Enke.
116 D	1815	115, 99867	149 1 56	83 28 34	44 29 55	1. 2128690	0. 93121968	Bessel.
117 D	1818	56, 96539	182 45 22	70 26 11	89 43 48	1. 1977640	— — —	Enke.
118 R	1818	338, 09679	357 0 24	90 7 29	62 40 50	0. 8479000	— — —	Bessel.
(86) D	1819	27, 26634	156 58 2	334 32 50	13 36 33	0. 3354946	0. 8484851	Enke.
119 D	1819	178, 73793	287 13 45	273 43 57	80 44 16	0. 3419560	— — —	Cacciatore.
120 D	1819	199, 90670	274 40 51	113 10 46	10 42 48	0. 7736380	0. 75519035	Enke.
121 D	1819	333, 25203	67 18 48	77 13 57	9 1 16	0. 8925590	0. 6867458	Enke.
122 R	1821	80, 54306	239 29 25	48 40 56	73 33 7	0. 0918252	— — —	Rosenberger.
123 R	1822	125, 58576	192 45 48	177 27 22	53 34 48	0. 5044290	— — —	Enke.
(86) D	1822	145, 99435	157 11 29	334 19 32	13 22 25	0. 3457930	0. 8445479	Enke.
124 R	1822	197, 03925!	219 53 48	97 21 23	37 43 4	0. 84611	— — —	Heiligstein!
125 R	1822	296, 65598	271 48 9	92 43 47	52 39 6	1. 1463570	— — —	Nicolai.
126 R	1823	343, 45058	274 34 30	303 3 0	76 11 57	0. 2265030	— — —	Enke.
127 R	1824	193, 51837	260 16 32	234 19 9	54 34 19	0. 5912360	— — —	Rumker.
128 D	1824	273, 07294	4 32 6	279 16 44	54 33 32	1. 0498350	— — —	Enke.
129 R	1825	150, 66597	273 55 2	20 6 8	56 41 6	0. 8891220	— — —	Clausen.
130 R	1825	345, 27434	318 15 15	215 39 18	33 35 10	1. 2370650	0. 9817028	Hansen.
131 D	1825	230, 71754	10 14 24	192 56 9	89 41 47	0. 8834710	— — —	Clausen.
(86) D	1825	259, 28544	157 13 31	334 27 6	13 21 56	0. 3446100	0. 8449979	Enke.
132 D	1826	111, 92448	116 59 27	197 36 34	40 0 26	2. 0079020	— — —	Nicolai.
(74) D	1826	77, 42395	109 46 8	251 28 23	13 33 56	0. 9025680	0. 7469512	Santini.
133 D	1826	281, 95873	57 48 24	44 6 28	25 57 18	0. 85281	— — —	Argelander.
134 D	1826	322, 41179	154 57 7	235 14 19	90 34 50	0. 02662	— — —	Santini.
135 R	1827	35, 92860	33 30 16	184 27 49	77 35 35	0. 50653	— — —	Heiligstein.
136 R	1827	158, 84218	297 31 42	318 10 28	43 38 45	0. 80415	— — —	Heiligstein.
137 R	1827	254, 68133	250 58 13	149 39 4	54 3 19	0. 137499	— — —	Nicolai.
(86) D	1829	9, 71723	157 17 26	334 28 47	13 20 48	0. 345362	0. 8447044	Enke.

Nota. 1.° L'eccentricità 0,9670888 inserita per errore tipografico di fronte alla Cometa 26 D (*pag.* 296) deve essere attribuita alla Cometa seguente (15) R.

2.° L'orbita della Cometa N. 124 fu calcolata dal signor Heiligstein sopra poche e mal sicure osservazioni di Bologna e di Marsiglia ridotte al meridiano di quest' ultimo luogo (*Astron. Nachrichten Vol. V. p.* 533). Ivi non è indicato il meridiano

da cui contasi il tempo del passaggio al perielio, nè ci siamo permessi alcun cambiamento. È ragionevole supporlo riferito al meridiano di Marsiglia.

Osservazione. Quantunque la teoria delle Comete sia riservata al secondo volume, abbiamo creduto che volentieri si vedrebbero riuniti agli elementi delle orbite dei pianeti e dei satelliti eziandio quelli delle Comete, giacchè si devono esse pure riguardare come appartenenti al nostro sistema solare. Il Catalogo che qui ne porgiamo è un compendio di quello del signor Schumacher (*Astronomische Abhandlungen*, parte I. Altona 1823) da cui siamo stati obbligati di escludere le molta orbite di una stessa Cometa determinate da diversi Astronomi per non eccedere i limiti stabiliti ad un libro d' instituzione elementare, e per la stessa ragione abbiamo tralasciato le importantissime note e citazioni relativa a ciascheduna Cometa poste in fine di quel prezioso Catalogo. Vi abbiamo aggiunto in cambio le Comete osservate dopo il 1822, estraendone gli elementi da varie opere periodiche, e soprattutto dalle più volte citate notizie astronomiche dello stesso Autore.

Per la chiara intelligenza noteremo 1.° essere incertissime le orbite accompagnate dal segno ?; 2.° il tempo medio del passaggio al perielio essere contato dal mezzodì sotto il meridiano di Parigi; 3.° doversi riguardare coma paraboliche quella orbite, nelle quali non è asseguata alcuna eccentricità; come ellittiche quelle accompagnate da un' eccentricità < 1; come iparboliche quelle corrispondenti ad una eccentricità > 1; 4.° essere periodiche, e più volte osservate nei loro ritorni al perielio quelle Comete che corrispondono ad un numero racchiuso nel segno ( ). Così la Cometa (86) fu la prima volta osservata nell' anno 1786, e trovasi registrata sotto il numero progressivo 86; indi di bel nuovo veduta negli anni 1795, 1805, 1819, 1822, 1825, 1829; 5.° le lettere D, R poste accanto al numero progressivo di ciascuna Cometa indicano se essa ha un moto *diretto*, ovvero *retrogrado*.

Non abbiamo accompagnato le orbite ellittiche dal tempo della rivoluzione periodica, ed abbiamo omesso il semiasse maggiore per mancanza di spazio. Questi elementi si otterranno agevolmenta dietro le seguenti equazioni risultanti dalla terza legge di Keplero, la quali verranno dimostrate nel capitolo delle forze centrali (vol. II)

$$a = \frac{q}{1-e}; \quad T = \frac{2\pi}{k} a^{3/2}; \quad \zeta = R'' k \, a^{-3/2};$$

dove q ed e rappresentano la distanza perielia, e l' eccentricità data nella tavola; a il semiasse maggiore; T il tempo della rivoluzione siderale espressa in giorni; ζ il moto diurno medio in secondi di grado, essendo in questa ipotesi i logaritmi costanti rappresentati dai seguenti numeri

$$\log \frac{2\pi}{k} = 2,5625985; \quad \log R'' k = 3,5500066.$$

INDICE

DELLE

MATERIE CONTENUTE NEL PRIMO VOLUME

Vol.I. Tav.I
6
9
8
10
14
15
16
17
18
19
22
20
21